第二版

数学史概论

A History of Mathematics(2nd)

李文林

A History of Mathematics



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

了解歷史的變化是了解

这門科學的一个步驟

陳省身

《数学史教程》阅后感

吴文俊

李文林《数学史教程》一书，即将再版.①由于时间匆促，我只能匆匆翻阅，但印象深刻.这无疑将是一部传世之作.它对数学历史的认识与研究，将起不可估量的影响.

本书有许多同类史书所不能企及的特点.

特点之一：本书有着同类书中最大的空间跨度与时间跨度.从上古的巴比伦、希腊、中国、印度、阿拉伯世界，以至当代数学，遍及世界各地对于数学的贡献地位与影响，都有中肯的评论，这与常见的所谓世界数学史之以古希腊及其对现代数学影响为核心，其它则犹如点缀甚至歪曲者有明显的区别.

特点之二：本书不仅对史实有详尽而忠实的介绍，而且兼有史评史论的作用，更有精辟的历史观.例如作者称古希腊的数学是一种论证数学，而说中国的古代数学，在南北朝三国时期，也进入到论证数学，刘徽即为其杰出代表之一.至于中世纪欧洲数学的崛起，微积分的创立以及近代数学的诞生史，对于它们的历史背景与社会根源，作者都有敏锐的评论.作者对整个数学的发展有着明确的数学史观.在本书第三章之末，作者认为缺乏演绎论证的算法倾向，与缺乏算法创造的演绎倾向同样难以升华为现代数学，似乎可以说明这一点.

特点之三：本书不仅对数学家与他们的学术成就作了概括的介绍，而且对一些重要成就，不惜花费篇幅，作了较详细的忠实于原始创造的说明.例如阿基米德对于球体积与抛物形弓形面积的计算，刘徽对于 π

---

① 第二版书名改为《数学史概论》——出版者注.

的计算原理与方法，牛顿与莱伯尼茨关于微积分的发现过程，以至较近代如康托尔关于非可数集合的发现等等，都作了较详细的介绍．此类介绍可以说贯彻全书．这不仅可以满足读者们对了解历史发展的要求，而且可以深入体会数学大师们原始创新的艰苦历程与来龙去脉，其中有些在其它的数学史书中似从未见过．

最后，本书除了数学家们一般的传统故事外，还介绍了许多有趣的奇闻轶事．例如牛顿的许多传记故事，是大家所熟知的．但这些故事，都是由终身未婚的牛顿的外甥女管家所纪录而流传下来的，特别是苹果落地的故事，即是由这位女管家告知法国的哲学家伏尔泰，再由伏尔泰写进《牛顿哲学原理》一书才为人们所知．这个故事我是第一次知道，相信很多读者也是如此．诸如此类的故事随处可见，这使向来枯燥无味只供专家们研读的数学史书，不仅有可读性，而且读之趣味盎然．这在其它数学史书也是难以见到的．

由于时间，本人未能将全书仔细拜读．作为翻阅本书的初步认识，我认为此书可作为置诸案头随时翻阅的精品书籍之一．不论是专业的数学家，还是数学的业余爱好者，甚至是其它领域的非数学工作者，翻阅此书都会开卷有益并感到乐趣．

吴文俊

2002年7月

第二版前言

本书是《数学史教程》(李文林)(高等教育出版社2000年出版)的第二版.

《数学史教程》自2000年8月出版以来,已印刷了五次,这多少说明了数学史作为一门学科所受到的日益增长的关注.这对我来说既是一种慰藉,更是一种鞭策,促使我根据初版使用的情况及读者的反馈意见对全书进行一次必要的修订,遂导致了这第二版的出现.

第二版在框架结构和基本内容上虽无本质变更,但作者对某些段落作了适当改写与增删,对初版中由于付印仓促而产生的版误与疏漏尽可能地作了修正,书末添加了二个索引(人名索引与术语索引)则使本书作为学术著作更趋完整.

再版书名改为《数学史概论》,以更充分地反映本书的弹性,即除了作为大专院校数学史课程的参考教材,同时也为对数学史感兴趣的各类读者提供一个基础读物或研究导引,这本是在第一版前言中已表明的初衷.

在本书再版之际,作者愿向所有关心、扶植、批评本书的师长、同事和友人致以衷心的谢意.

数学大师陈省身先生为本书再版惠赠墨宝,先生的题词不仅是对作者的勉励,更是对国内数学史教学与研究工作的巨大激励.陈先生还对本书的修订多有指教,再版更名及增编索引,都是吸取了他的意见,作者愿借此机会向陈省身先生致以崇高的敬意和深深的感激.

吴文俊院士在百忙中批阅本书,并在北京国际数学家大会(ICM－2002)即将召开之际赶写了阅后感.多年来吴文俊院士对作者本人及国内数学史界始终鼎力支持.对吴师的一贯扶植,作者将永志不忘.

作者还由衷感谢严士健教授和李忠教授.严士健教授对本书屡加

鼓励,并提出了宝贵的修改意见.李忠教授对本书的关心可追溯到第一版以前.事实上,本书(第一版)由高等教育出版社出版,最初正是源自于他的推荐.

本书第一版出版以后,我又曾在中国科学院数学与系统科学研究院和清华大学分别为博士研究生和本科大学生讲授了数学史概论的选修课程.这些课程为本书再版修订提供了实践依据.作者谨向邀请我开设数学史课程的中国科学院数学与系统科学研究院教育委员会和清华大学数学科学系特别是冯克勤教授表示谢忱.

王辉、袁敏二位博士在繁重的教学任务之余帮助编制了有用的索引.在整个再版修订过程中,徐泽林、袁敏、王辉、刘向晖、程钊、程小红、林立军、尚宇红诸位博士先后参加了细致的校读与勘误.提出修改意见的还有郭世荣、邓明立教授和姚芳博士等,作者在此向他(她)们一并致谢.

最后,作者要对高等教育出版社在再版过程中给予的合作表示感谢.

限于水平,本书虽经修订,缺点错误仍在所难免,欢迎各界继续批评指正,以祈不断改进完善.

中国科学院数学与系统科学研究院
李文林
2002 年 8 月

第一版前言

本书的基础是作者1998年秋季学期在北京大学讲授数学史选修课的讲义，部分内容也曾在西北大学数学系数学史研究生中进行过试讲.此次出版时，作者对讲义作了全面的整理和较大的扩充.

近年来，我国有越来越多的高等院校已经或正在准备开设数学史课程，本书的目的是为这门课程提供一个参考教材.

数学史学科的意义在本书序论中有较充分的论述，这里不作重复.作为一本教材，本书力求以精简的篇幅勾画出数学科学发展的清晰轮廓.作者意识到数学史课程有着广泛的读者对象，因此试图寻找在内容、结构、篇幅以及叙述方式方面的某种平衡，以使本书在以大专学校数学专业师生为基本对象的同时，也能在不同程度上符合对数学史感兴趣的各类读者的需求.这样做难免会带来一些问题，特别是在材料取舍、论述详略深浅等方面的问题.另一方面，数学是一个如此广阔而又深刻的知识领域，既准确又生动地反映这门科学的创造活动与历史过程，本身是十分困难的任务，限于作者水平，本书在具体内容上也必定存在不少缺点与错误，作者诚恳欢迎各界读者在阅读、使用过程中发现问题并提出批评，以便进一步更正、修订.

在本书出版之际，作者首先要感谢北京大学数学科学学院特别是当时任院长的姜伯驹院士，如果不是他们邀请我开设数学史选修课，本书是不可能产生的.

作者在编写本书的过程中，曾就许多专业问题频繁地请教有关的专家，在这方面，我要衷心感谢陆汝钤、虞言林、何育赞、刘彦佩、陈兰荪、陈翰麟、梁国平、胥鸣伟、姚景齐、陈培德、徐光辉诸位教授，他们给予的中肯指点，使本书的编写获益匪浅.当然，本书的一切缺点和错误，概由作者本人负责.

徐泽林博士、程钊博士帮助整理了部分手稿(分别涉及第4、5章和第8、9、10章),程钊博士还校读了几乎全部清样;王辉博士也帮助校读了部分清样;平艳茹女士帮助打印了序论和第1、2章的样稿;姚芳博士曾专程到北大听了我的讲课并提出了宝贵意见,对于他(她)们的热诚帮助,我愿在此一并致谢.

我还要感谢我的妻子匡裕玫女士,她不仅帮助誊写了部分手稿,而且整个来说,没有她的支持,本书是不可能完成的.

最后,我还要感谢高等教育出版社和施普林格出版社的合作小组,他们为本书的顺利与及时出版付出了很大的辛劳.

中国科学院数学与系统科学研究院

李文林

2000年7月于北京中关村

目　录

数学史——人类文明史的重要篇章 0

数学史研究数学概念、数学方法和数学思想的起源与发展，及其与社会政治、经济和一般文化的联系.

英国科学史家丹皮尔(W.C.Dampier)曾经说过："再没有什么故事能比科学思想发展的故事更有魅力了". 数学是历史最悠久的人类知识领域之一. 从远古屈指计数到现代高速电子计算机的发明；从量地测天到抽象严密的公理化体系，在五千余年的数学历史长河中，重大数学思想的诞生与发展，确实构成了科学史上最富有理性魅力的题材.

当然，仅仅具有魅力并不能成为开设一门课程的充分理由. 数学史无论对于深刻认识作为科学的数学本身，还是全面了解整个人类文明的发展都具有重要意义.

0.1 数学史的意义

与其他知识部门相比，数学是一门历史性或者说累积性很强的科学. 重大的数学理论总是在继承和发展原有理论的基础上建立起来的，它们不仅不会推翻原有的理论，而且总是包容原先的理论. 例如，数的理论的演进就表现出明显的累积性；在几何学中，非欧几何可以看成是欧氏几何的拓广；溯源于初等代数的抽象代数并没有使前者被淘汰；同样现代分析中诸如函数、导数、积分等概念的推广均包含了古典定义作为其特例，……. 可以说，在数学的进化过程中，几乎没有发生过彻底推

翻前人建筑的情况.如果我们对比天文学的“地心说”①、物理学的“以太说”②、化学的“燃素说”③的命运,就可以看清数学发展不同于其他学科的这种特点.因此有的数学史家认为“在大多数的学科里,一代人的建筑为下一代人所拆毁,一个人的创造被另一个人所破坏.唯独数学,每一代人都在古老的大厦上添加一层楼.”④这种说法虽然有些绝对,但却形象地说明了数学这幢大厦的累积特性.当我们为这幢大厦添砖加瓦时,有必要了解它的历史.

人们也常常把现代数学比喻成一株茂密的大树,它包含着并且正在继续生长出越来越多的分枝.按美国《数学评论》(Mathematical Reviews)杂志的分类,当今数学包括了约60个二级学科,400多个三级学科,更细的分科已难以统计.面对着如此庞大的知识系统,职业数学家越来越被限制于一、二个专门领域.庞加莱(H.Poincaré,1854—1912)曾经被称为“最后一位数学通才”,虽然比他稍晚的希尔伯特(D.Hilbert,1862—1943)也跨越过众多的领域,但这样的数学家毕竟越来越难得了,而正是希尔伯特曾在著名的巴黎演讲中指出:“数学科学是一个不可分割的整体,它的生命力正是在于各个部分之间的联系”,并提醒人们警惕数学“被分割成许多孤立的分支”的危险⑤.有些学者认为,“跟这种危险作斗争的最稳妥的办法也许就是要对于数学的过去成就、传统和目标得到一些知识”⑥,这也是呼吁人们了解一点数学的历史.

数学史不仅仅是单纯的数学成就的编年记录.数学的发展决不是一帆风顺的,在更多的情况下是充满犹豫、徘徊,要经历艰难曲折,甚至

---

① 地心说:亦称“地球中心说”认为地球居宇宙中心静止不动,月球、行星、太阳及其他恒星均围绕其运动.地心说最初由亚里士多德提出,公元2世纪经托勒玫发展后,在天文学中长期占统治地位,16世纪被哥白尼的“日心说”所推翻.

② 以太说:17世纪为解释光的传播而提出的媒质论,假设了一种无所不在、没有质量和绝对静止的弹性媒质的存在.以太说在19世纪被物理学界普遍接受,但一切试图证实以太存在的实验均告失败,爱因斯坦相对论提出后,“以太”作为一种陈旧的概念已被彻底抛弃.

③ 燃素说:18世纪流行的一种燃烧理论,认为可燃物质中存在有“燃素”,燃烧时燃素以光、热的形式逸出.18世纪末,燃素说被科学的氧化说所取代.

④ H.Hankel:Die Entwicklung de Mathematik in den letzten Jahrhunderten,Tubingen(1884),p.25.

⑤ 希尔伯特:《数学问题》,“数学史译文集”,p.81,上海科技出版社(1981).

⑥ 克莱因:《古今数学思想》(第一册),vi,上海科技出版社(1979).

会面临危机. 数学史也是数学家们克服困难和战胜危机的斗争记录. 无理量的发现、微积分和非欧几何的创立,乃至费马大定理的证明,……,这样的例子在数学史上不胜枚举,它们可以帮助人们了解数学创造的真实过程,而这种过程在通常的教科书中是以定理到定理的形式被包装起来的. 对这种创造过程的了解则可以使我们从前人的探索与奋斗中汲取教益,获得鼓舞和增强信心.

因此,可以说**不了解数学史就不可能全面了解数学科学**. 在这方面,凡有真知灼见的数学家都有切身体会,例如莱布尼茨(G. Leibniz, 1646—1716) 指出:"知道重大发明特别是那些决非偶然的、经过深思熟虑而得到的重大发明的真正起源是很有益的. 这不仅在于历史可以给每一个发明者以应有的评价,从而鼓舞其他人去争取同样的荣誉,而且还在于通过一些光辉的范例可以促进发现的艺术,揭示发现的方法"[①];庞加莱认为:"如果我们希望预知数学的将来,适当的途径是研究这门学科的历史和现状"[②];外尔(H. Weyl, 1885—1955) 也说过:"除了天文学以外,数学是所有学科中最古老的一门科学. 如果不去追溯自古希腊以来各个时代所发现与发展起来的概念、方法和结果,我们就不能理解前 50 年数学的目标,也不能理解它的成就"[③].

那么,是不是只有学习和研究数学的人才需要了解数学史呢?或者说了解数学史只是对学习和研究数学有好处呢?不是的. 数学科学作为一种文化,不仅是整个人类文化的重要组成部分,而且始终是推进人类文明的重要力量. 对于每一个希望了解整个人类文明史的人来说,数学史是必读的篇章.

数学史在整个人类文明史上的这种特殊地位,是由数学作为一种文化的特点决定的.

首先,数学以抽象的形式,追求高度精确、可靠的知识.

---

① G. Leibniz: Historia et origo Calculi differentialis(微积分的历史和起源,1714),英译文见 J. J. Child: The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz, Open Court, 1920.

② 转引自克莱因:《古今数学思想》(第一册), iv. 上海科学技术出版社(1979)

③ H. Weyl: A Half Century of Mathematics, American Mathematical Monthly, Vol. 58, No. 8, p. 523.

抽象并非数学独有的特性,但数学的抽象却是最为典型的.数学的抽象在数与形等原始概念的形成中已经体现出来(参见第1章),并且经过一系列阶段而达到了远远超过其他知识领域的程度.数学的抽象舍弃了事物的其他一切方面而仅保留某种关系或结构;同时,不仅数学的概念是抽象的,而且数学的方法也是抽象的.从古希腊时代起,数学就使用一种特有的逻辑推理规则,来达到确定无疑的结论.这种推理方式具有这样的严密性,对于每个懂得它的人来说都是无可争辩的,因而其结论也是无可争辩的.这种推理模式赋予数学以其他科学不能比拟的精确性,成为人类思维方法的一种典范,并日益渗透到其他知识领域,此乃数学影响于人类文化的突出方面之一.

与抽象性相联系的数学的另一个特点是在对宇宙世界和人类社会的探索中追求最大限度的一般性模式特别是一般性算法的倾向.这种倾向在数学的早期发展中亦已表现出来.埃及纸草书和巴比伦泥版文书中的数学文献,虽然都是具体问题的汇集,但其中采用的算法大都具有一般性.二分之一高乘底的面积公式,如果只对某个特殊的三角形适用,那在数学上是几乎没有意义的,它应适用于一切三角形.我们在本书有关章节中将会看到:对于普遍性法则的追求怎样引导了笛卡儿解析几何的发明;微积分的创立也可以看成是寻求有一般性的无限小算法的结果,…….正是这种追求一般性模式的倾向,使数学具有了广泛的适用性.同一组偏微分方程,在流体力学中用来描写流体动态;在弹性力学中用来描写振动过程;在声学中用来描写声音传播等等,…….还没有哪一门科学在广泛应用上能与数学相比.数学越来越成为一种普遍的科学语言与工具,在推动其他科学和整个文化的进步方面起着不可替代的巨大作用.

最后,数学作为一种创造性活动,还具有艺术的特征,这就是对美的追求.英国数学家和哲学家罗素(B. Russell,1872—1970)说过:"数学不仅拥有真理,而且拥有至高无上的美——一种冷峻严肃的美,就像是一尊雕塑.…… 这种美没有绘画或音乐那样华丽的装饰,它可以纯洁到崇高的程度,能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的完

美境界"①.罗素说到的是一种形式高度抽象的美,即逻辑形式与结构的完美.此外数学创造过程中想象与直觉的运用也提供了数学美的源泉.这种以简洁与形式完美为目标的追求,是数学影响于人类文化的又一个重要因素.古代希腊形式完美的演绎数学与这个时代的理性化的哲学与理想化的雕刻交相辉映,这并不是偶然的.

由于数学作为一种文化的上述特征,它对整个人类文明产生了不容置疑的影响,无论是物质文明还是精神文明两方面都是这样,对此我们将在第 14 章"数学与社会" 中加以介绍.

综上所述可以认为,数学是各个时代人类文明的标志之一.许多历史学家往往通过数学这面镜子来了解其他文化的特征.著名数学家和哲学家怀特黑德(A. Whitehead,1861—1947) 在批评以往思想史家们忽视数学的地位时,曾打了一个比喻来说明数学是人类思想史的要素之一.他说:"假如有人说:编著一部思想史而不深刻研究每一个时代的数学概念,就等于是在《哈姆雷特》这一剧本中去掉了哈姆雷特这一角色,这种说法也许太过分了,我不愿说得这样过火.但这样做却肯定地等于是把奥菲莉这一角色去掉了.奥菲莉对整个剧情来说,是非常重要的"②.这是仅就思想史而言.实际上我们可以说:**不了解数学史,就不可能全面了解整个人类文明史**.

0.2　什么是数学——历史的理解

数学史的主题是数学的发展,我们谈论数学史,自然会首先关心"什么是数学" 这个问题.

数学本身是一个历史的概念,数学的内涵随着时代的变化而变化,给数学下一个一劳永逸的定义是不可能的.我们在这里就从历史的角

① 罗素:《神秘主义与逻辑》(1918),这里转引自基斯·德夫林:《数学:新的黄金时代》,p.69,上海教育出版社(1997).

② A. N. Whitehead: Science and the Modern World, Cambridge University Press, (1932).中译本:商务印书馆(1989),这里"哈姆雷特" 和"奥菲莉" 分别是莎士比亚戏剧《哈姆雷特》中的男、女主角.

度来谈谈"什么是数学"这个问题.

公元前6世纪前,数学主要是关于"数"的研究.这一时期在古埃及、巴比伦、印度与中国等地区发展起来的数学,主要是计数、初等算术与算法,几何学则可以看作是应用算术.

从公元前6世纪开始,希腊数学的兴起,突出了对"形"的研究.数学于是成为关于数与形的研究.从那时起直到17世纪,数学的对象没有本质的变化.

希腊人主要对几何感兴趣,他们也研究数,但却与他们的埃及、巴比伦前辈相反,将数放在几何形式下去考察(只有少数例外如较晚的丢番图).尽管如此,公元前4世纪的希腊哲学家亚里士多德仍将数学定义为:

"数学是量的科学"①.

其中"量"的涵义是模糊的,显然不能单纯理解为"数量".亚里士多德的定义影响绵长.直到16世纪,英国哲学家培根(F.Bacon, 1561—1626)将数学分为"纯粹数学"(pure mathematics)与"混合数学"(mixed mathematics).这里"混合数学"相当于应用数学,而培根所谓的"纯粹数学"则定义为:"处理完全与物质和自然哲学公理相脱离的量的科学"②.

在17世纪,像笛卡儿(R.Deacartes,1596—1650)这样的数学家与哲学家对数学的看法有微妙的变化,笛卡儿认为:

"凡是以研究顺序(order)和度量(measure)为目的的科学都与数学有关"③.

恰恰是在笛卡儿的时代,数学发生了重大的转折.整个17、18世纪,数学家们关注的焦点是运动与变化.牛顿与莱布尼茨制定的微积分本质上是运动与变化的科学,它使科学家们能够从数学上研究行星运

---

① 参阅 F. Cajori: A History of Mathematics, p. 285, Macmillan(1919).

② F.Bacon: Advancement of Learning(1605),此处引文转译自 R.Moritz(ed.): On Mathematics and Mathematicians, Dover(reprinted, 1958), p.2.

③ R. Descartes: Regulae ad Directionem Ingenii,英译本载 E. S. Haldane & G. R. T. Ross (eds.): The Philosophical Works of Descartes, Cambridge(1911).

动、机械的运动、流体运动、动植物生长，…… 等等. 因此，在牛顿与莱布尼茨以后，数学成为研究数、形以及运动与变化的学问.

当然，运动与变化的数学描述仍然离不开数与形. 因此在 19 世纪恩格斯还是这样来论述数学的本质："纯数学的对象是现实世界的空间形式与数量关系"①. 根据恩格斯的论述，数学可以定义为：

数学是研究现实世界的空间形式与数量关系的科学.

然而就在恩格斯的时代，数学又开始发生本质的变化. 19 世纪的数学家对数学本身的兴趣空前增长. 也就是说，除了现实世界的材料，他们更多地关注数学内部的需要. 正如本书第 8、9、10 章将要介绍的那样，抽象代数、非欧几何以及严格化的分析都是这类内部需要的产物. 因此，从 19 世纪特别是后期开始，数学成为研究数与形、运动与变化，以及研究数学自身的学问. 这种以数学自身为目的的倾向，也就是现代意义下的纯粹数学的倾向，按照罗素的见解，是 19 世纪数学的主要功绩. 这促使人们对数学的本质进行新的思考. 在 19 世纪晚期，集合论的创始人康托尔(G. Cantor，1845—1918) 曾经提出：

"数学是绝对自由发展的学科，它只服从明显的思维. 就是说它的概念必须摆脱自相矛盾，并且必须通过定义而确定地、有秩序地与先前已经建立和存在的概念相联系"②.

而罗素则在 20 世纪初对数学下了这样一个定义：

"纯粹数学完全由这样一类论断组成，假定某个命题对某些事物成立，则可推出另外某个命题对同样这些事物也成立. 这里既不管第一个命题是否确实成立，也不管使命题成立的那些事物究竟是什么，……. 只要我们的假定是关于一般的事物，而不是某些特殊的事物，那么我们的推理就构成为数学. 这样，数学可以定义为这样一门学科，我们永远不知道其中所说的是什么，也不知道所说的内容是否正确"③.

---

① 恩格斯：《反杜林论》，见《马克思、恩格斯选集》，第 3 卷，p. 77. 人民出版社(1972). 恩格斯这句话本身没有提及运动与变化，但在具体解释中强调了所谓"变量数学"，即关于运动与变化的数学.

② G. Cantor：Grundlagen einer allgemeinen Manigfaltigkeitslehre，Leipzig(1883).

③ B. Russell：Recent Work on the Principle of Mathematics，International Monthly，Vol. 4，(1901).

罗素的说法从极端的角度强调了数学的自身需要与逻辑方面，它尽管很有名，但却很难被接受为数学的客观定义. 20世纪50年代，前苏联一批有影响的数学家试图修正前面提到的恩格斯的定义来概括现代数学发展的特征：

"现代数学就是各种量之间的可能的，一般说是各种变化着的量的关系和相互联系的数学"①.

这一定义不再区分"数"与"形"，可以说又回到了亚里士多德对数学的最早定义中所使用过的"量"，但这个量，却被赋予了丰富的现代涵义：它不仅包括现实世界的各种空间形式与数量关系，而且包括了一切可能的空间形式与数量关系（如几何学中的高维空间、无穷维空间；代数学中的群、域；分析中的泛函、算子；…… 等等）.

从20世纪80年代开始，又出现了对数学的定义作符合时代的修正的新尝试. 主要是一批美国学者，将数学简单地定义为关于"模式"(pattern)的科学：

"[数学]这个领域已被称作模式的科学(science of pattern)，**其目的是要揭示人们从自然界和数学本身的抽象世界中所观察到的结构和对称性"**②.

这一定义实际上是用"模式"代替了"量"，而所谓的"模式"有着极广泛的内涵，包括了数的模式，形的模式，运动与变化的模式，推理与通信的模式，行为的模式，……. 这些模式可以是现实的，也可以是想象的；可以是定量的，也可以是定性的. 数学的这一新定义，以其高度的概括性，已日益引起关注并获得大多数数学家的认同与接受.

0.3　关于数学史的分期

数学史的分期也是讲述数学史时必然会遇到的问题，它实际上涉

---

① 亚历山大洛夫等：《数学——它的内容、方法和意义》，第一卷，p.61，科学出版社(1958).

② Renewing U.S. Mathematics: A Plan for the 1990s, The National Academy Press (1990). 中译本：《振兴美国数学——90年代的计划》，世界图书出版公司(1993).

及按怎样的线索来描述数学发展的历史.不同的线索将给出不同的分期,通常采用的线索如:

(1) 按时代顺序;

(2) 按数学对象、方法等本身的质变过程;

(3) 按数学发展的社会背景

等等.由于数学的发展是一个错综复杂的知识过程与社会过程,用单一的线索贯穿难免会有偏颇,因此一般数学通史著作往往采取以某一线索为主,同时兼顾其他因素的做法.分期问题的深入讨论属于数学史专门研究的范围,而且存在许多争议.本书作为以数学思想为主的数学史教程,也不宜执持单一的线索.因此我们综合参考了各方面的论述,同时照顾本书叙述的方便而对数学史作出如下的分期:

Ⅰ.数学的起源与早期发展(公元前6世纪前)

Ⅱ.初等数学时期(公元前6世纪—16世纪)

(1) 古代希腊数学(公元前6世纪—6世纪)

(2) 中世纪东方数学(3世纪—15世纪)

(3) 欧洲文艺复兴时期(15世纪—16世纪)

Ⅲ.近代数学时期(或称变量数学建立时期,17世纪—18世纪)

Ⅳ.现代数学时期(1820'—现在)

(1) 现代数学酝酿时期(1820'—1870)

(2) 现代数学形成时期(1870—1940')

(3) 现代数学繁荣时期(或称当代数学时期,1950—现在)

特别需要说明的是,关于现代数学的起始与划分,目前分歧较大.有些作者以1870年为近、现代数学的分界线;有些作者则将1940年以后的数学看作为现代数学.这实际上涉及到对现代数学本质的理解.在这方面,本书倾向于这样的观点,即认为现代数学的基本精神与主要特征,从19世纪特别是中叶已开始酝酿[①].不过,我们将现代数学进一步区分为上列三个不同的阶段,以充分反映20世纪尤其是后半世纪数学

---

① 参阅《苏联大百科全书选译:数学·算术》,高等教育出版社(1956).注意该中译本将现代数学译作"近世数学".

发展的客观进程.

本书内容的具体安排,正是遵照了上述分期原则.全书共15章(本章除外),其中关于数学起源与早期发展的有1章(第1章);介绍初等数学时期的有3章(第2、3、4章);叙说近代数学兴起的有3章(第5、6、7章);论述现代数学发展的有6章(第8、9、10、11、12、13章);最后两章则带有专题性质.整个课程大约适合于一个学期的讲授.当然,实际授课时可以根据不同的对象和要求而进行适当增删、调整.我们希望这样的安排能够满足一般大学本科数学史课程的需要.

数学的起源与早期发展 1

1.1 数与形概念的产生

人类在蒙昧时代就已具有识别事物多寡的能力，从这种原始的"数觉"到抽象的"数"概念的形成，是一个缓慢的、渐进的过程.原始人在采集、狩猎等生产活动中首先注意到一只羊与许多羊、一头狼与整群狼在数量上的差异.通过一只羊与许多羊、一头狼与整群狼的比较，就逐渐看到一只羊、一头狼、一条鱼、一棵树……之间存在着某种共通的东西，即它们的单位性.同样，人们会注意到其他特定的物群，例如成双的事物，相互间也可以构成一一对应.这种为一定物群所共有的抽象性质，就是数.数概念的形成可能与火的使用一样古老，大约是在30万年以前，它对于人类文明的意义也决不亚于火的使用.

当对数的认识变得越来越明确时，人们感到有必要以某种方式来表达事物的这一属性，于是导致了记数，而记数是伴随着计数的发展而发展的.最早可能是手指计数，一只手上的五个指头可以被现成地用来表示五个以内事物的集合.两只手上的指头合在一起，不超过10个元素的集合就有办法表示.正如亚里士多德早就指出的那样，今天十进制的广泛采用，只不过是我们绝大多数人生来具有10个手指这样一个解剖学事实的结果.因此，虽然在历史上手指计数即用5或10的计数实践比二或三的计数出现要晚，但五进制和十进制却几乎一律地取代了

二进制、三进制等①.

当指头不敷运用时，就出现了石子记数等，以便表示同更多的集合元素的对应.但记数的石子堆很难长久保存信息，于是又有结绳记数和刻痕记数.中国古代文献《周易·系辞下》有“上古结绳而治，后世圣人，易之以书契”之说.“结绳而治”即结绳记事或结绳记数，“书契”就是刻划符号.

结绳方法不仅在中国而且在世界其他许多地方都曾使用过，有些结绳实物甚至保存下来.例如美国自然史博物馆(纽约)就藏有古代南美印加部落用来记事的绳结，当时人称之为基普(quipu)：在一根较粗的绳子上栓系涂有颜色的细绳，再在细绳上打各种各样的结，不同的颜色和结的位置、形状表示不同的事物和数目.图1.1是一个基普的实物照.这种记事方法在秘鲁高原一直盛行到19世纪，而世界上有些地方如日本琉球岛的居民至今还保持着结绳记事的传统.



图 1.1

迄今发现的人类刻痕记数的最早证据，是1937年在捷克摩拉维亚(Moravia)地方出土的一块幼狼胫骨(图1.2，同一根狼骨的两个侧

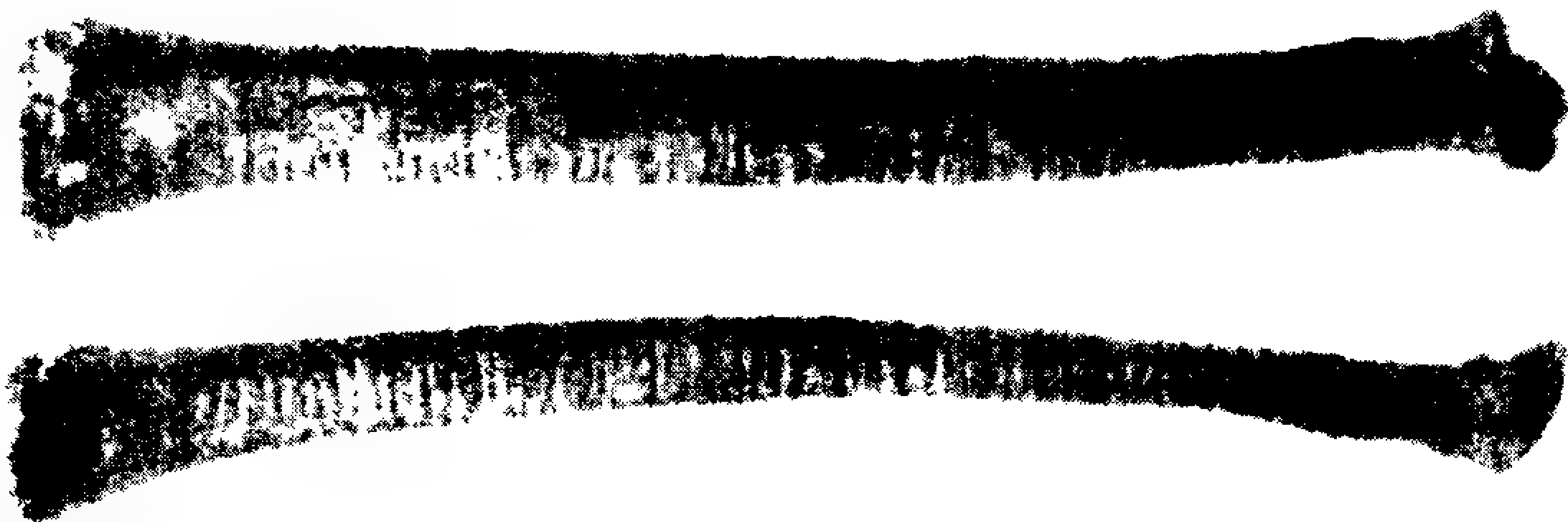


图 1.2

① 例如有人对数百个印第安部落进行的调查表明，其中大约有三分之一的部落是采用十进制；另有三分之一采用五进制或五一十进制；采用二进制的少于三分之一，而采用三进制的还不到百分之一.二十进制则在百分之十的部落中出现.参阅 W. C. Eels: Number Systems of North American Indians, American Mathematical Monthly, 20(1913), p. 293.

面)，其上有55道刻痕，分成两组：第一组25道痕，第二组30道痕，每一组内刻痕又按五个一群排列．这块狼骨的年代，据考大约在3万年前(这类刻痕记数的遗迹，也在其他许多地方被发现)．又经历了数万年的发展，直到距今大约五千多年前，终于出现了书写记数以及相应的记数系统．以下按时代顺序列举世界上几种古老文明的早期记数系统：

古埃及的象形数字(公元前3400年左右)：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

11 12 20 40 70 100 200 1000 10 000

巴比伦楔形数字(公元前2400年左右)：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

11 12 20 30 40 50 60 70 80 120 130

中国甲骨文数字(公元前1600年左右)：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 100 1000

希腊阿提卡数字(公元前500年左右)：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

11 12 15 16 20 30 50 60 70

中国筹算数码(公元前 500 年左右)：

纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

印度婆罗门数字(公元前 300 年左右)：

𑁒	𑁓	𑁔	𑁕	𑁖	𑁗	𑁘	𑁙	𑁚	𑁛	𑁜	𑁝	𑁞	𑁟	𑁠
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60

玛雅数字(?)

•	••	•••	••••	—	•/—	••/—	•••/—	••••/—
1	2	3	4	5	6	7	8	9

═	•/贝壳	••/贝壳	•••/贝壳	••••/贝壳	—/贝壳	•/—/贝壳
10	20	40	60	80	100	120

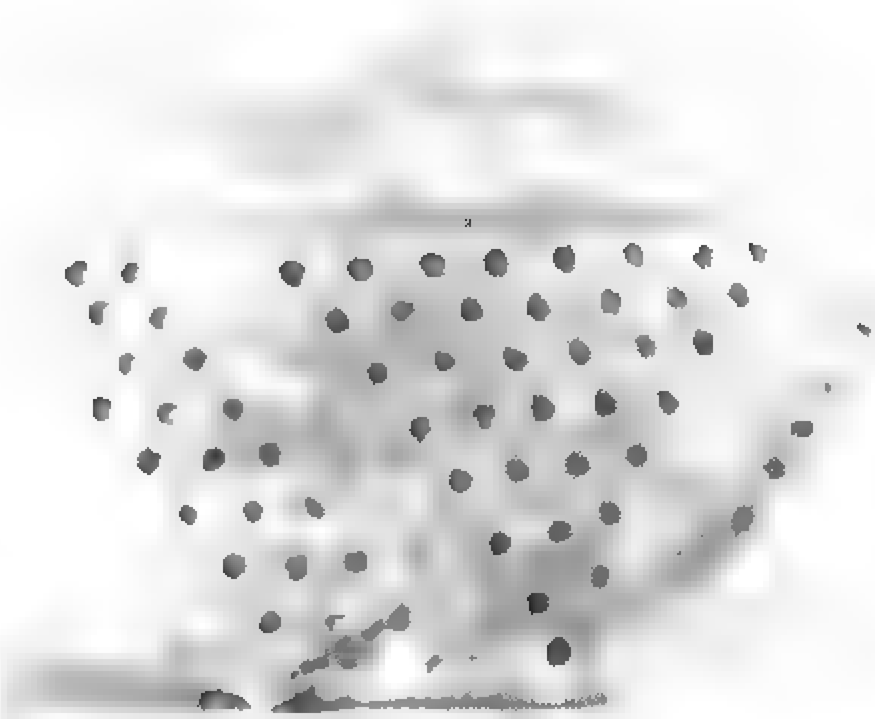
其中除了巴比伦楔形数字采用六十进制、玛雅数字采用二十进制外，其他均属十进制数系. 记数系的出现使数与数之间的书写运算成为可能，在此基础上初等算术便在几个古老的文明地区发展起来.

与算术的产生相仿，最初的几何知识则从人们对形的直觉中萌发出来. 史前人大概首先是从自然界本身提取几何形式(例如他们注意到圆月与挺松在形象上的区别)，并且在器皿制作、建筑设计及绘画装饰中加以再现. 图 1.3 一组照片显示了早期人类的几何兴趣，不只是对圆、三角形、正方形等一系列几何形式的认识，而且还有对全等、相似、对称等几何性质的运用. 经验的几何知识随着人们的实践活动而不断扩展，不过在不同的地区，几何学的这种实践来源方向不尽相同. 根据古希腊学者希罗多德(Herodotus，约公元前 484— 前 425) 的研究，古埃及几何学产生于尼罗河泛滥后土地的重新丈量. “几何学” 一词的希腊文 γεωμετρια 意即“测地”. 古埃及有专门人员负责测量事务，这些人被称为“司绳”(rope-stretcher)(图 1.4，底比斯古墓壁画，局部，约公元前 1415 年). 古代印度几何学的起源则与宗教实践密切相关，公元前 8 世



(i)埃及前王朝时期陶器





(ii)西安半坡出土的陶器残片

(iii)西安半坡遗址构形

图 1.3



图 1.4

纪至 5 世纪形成的所谓“绳法经”(Sulba-sutras),就是关于祭坛与寺庙建造中的几何问题及求解法则的记载.在古代中国,几何学起源更多地与天文观测相联系.中国最早的数学经典《周髀算经》(至晚公元前 2 世纪成书)事实上是一部讨论西周初年(公元前 1100 左右)天文测量中

所用数学方法(“测日法”)的著作.

1.2 河谷文明与早期数学

历史学家往往把兴起于埃及、美索不达米亚、中国和印度等地域的古代文明称为“河谷文明”.早期数学,就是在尼罗河、底格里斯河与幼发拉底河、黄河与长江、印度河与恒河等河谷地带首先发展起来的.从可以考证的史料看,古埃及与美索不达米亚的数学在年代上更为久远,只是在公元前均告衰微,崛起稍晚的中国与印度数学则延续到纪元之后并在中世纪臻于高潮.因此为叙述连贯起见,我们在本章中主要介绍古埃及与美索不达米亚的数学,而将古代中国与印度数学放到中世纪的章节(第 3、4 章) 中一并讲述.

1.2.1 埃及数学

肥沃的尼罗河谷,素称“世界最大沙漠中的最大绿州”,那里的人民依靠广阔的地理屏障在不受外来侵扰的环境下独立地创造了灿烂的文明,这种文明以古老的象形文字和巨大的金字塔为象征,从公元前 3100 年左右美尼斯(Menes)统一上、下埃及建立第一王朝起,到公元前 332 年亚历山大大帝(Alexander the Great) 灭最后一个埃及(波斯) 王朝(第三十一王朝) 止,前后绵延约三千年.

埃及象形文字(hieroglyphic,意为“圣刻”—— 神圣的雕刻) 产生于公元前 3500 年左右,约公元前 2500 年被简化为一种更易书写的“僧侣文”(hieratic),后又发展成所谓“通俗文”(domotic).长期以来,这些神秘的文字始终是不解之谜.直到 1799 年,拿破仑远征军的士兵在距离亚历山大城不远的古港口罗赛塔地方发现一块石碑,碑上刻有用三种文字 —— 希腊文、埃及僧侣文和象形文记述的同一铭文(这块石碑后来就叫“罗赛塔石碑”),才使精通希腊文的学者找到了解读埃及古文字的钥匙.19 世纪初,法国文字学家商博良(J-F. Champollion, 1790—1832) 和英国物理学家杨(Thomas Young, 1773—1829) 在这方

面取得了突破,为人们通过阅读象形文或僧侣文文献认识、理解包括数学在内的埃及古代文明打开了大门.

古埃及人在一种用纸莎草(Papyrus)压制成的草片上书写,这些纸草书有的幸存至今.我们关于古埃及数学的知识,主要就是依据了两部纸草书——莱茵德纸草书和莫斯科纸草书.

莱茵德纸草书最初发现于埃及底比斯古都废墟,1858 年为苏格兰收藏家莱茵德(H. Rhind)购得,因名.该纸草书现藏伦敦大英博物馆(图 1.5,上为全景,下为局部),长 525 cm,宽 33 cm,中间有少量缺失,缺失碎片 1922 年意外地在纽约一私人收存的医学纸草书中被发现,现藏美国布鲁克林博物馆.有时人们也称这部纸草书为阿姆士纸草书,以纪念一位叫阿姆士(A'hmose)的人,他在公元前 1650 年左右用僧侣文抄录了这部纸草书,而根据阿姆士所加的前言可知,他抄录的是一部已



图 1.5

经流传了两个多世纪的更古老的著作，其中涉及的数学知识一部分可能得传于英霍特普(Imhotep)，此人是法老卓塞尔(Zoser)的御医，同时也是一位传奇式的建筑师，曾督造过这位法老的金字塔.

莫斯科纸草书又叫戈列尼雪夫纸草书，1893 年由俄国贵族戈列尼雪夫在埃及购得，现藏莫斯科普希金精细艺术博物馆，其长度与莱茵德纸草书大致相同，宽只及后者的四分之一. 据研究，这部纸草书是出自第十二王朝一位佚名作者的手笔(约公元前 1890)，亦是用僧侣文写成.

这两部纸草书实际上都是各种类型的数学问题集. 莱茵德纸草书主体部分由 84 个问题①组成，莫斯科纸草书则包括了 25 个问题. 这些问题大部分来自现实生活，但纸草书的作者将它们作为示范性例子编集在一起. 这两部纸草书无疑是古埃及最重要的传世数学文献. 除此之外还存在一些零星的资料，已发现的有：卡呼恩(Kahun)纸草书和柏林纸草书(均出自第十二王朝时代)②、阿赫米姆(Akhmim)③木板文书(公元前 2000 年左右)以及克索斯时代的羊皮书一卷(公元前 1700 年左右)④等，它们也提供了关于埃及数学的一些补充信息.

如前所述，埃及人很早就发明了象形文字记号，这是一种以十进制为基础的系统，但却没有位值的概念. 这种记数制用不同的特殊记号分别表示 10 的前六次幂：简单的一道竖线表示 1，倒置的窗或骨(∩)表示 10，形似大写字母 C 的套索(𓍢，有时反写作9)表示 100，一朵莲花(𓆼)表示 1000，弯曲的手指(𓂭)表示 10 000，一条江鳕鱼(𓆐)表示 100 000，而跪着的人像(可能指永恒之神)(𓁨)则表示 1 000 000. 其他数目是通过这些记号的简单累积来表示，如数 12 345 则被记作

𓂭𓆼𓆼999∩∩∩∩|||||

在莱茵德纸草书和莫斯科纸草书中，象形数字被简化为僧侣文数字，冗长的重复记号被抛弃了，引进了一些表示数字与 10 的乘幂的倍

---

① 莱茵德纸草书最后还有一段难以解释的文字，有的文献称之为问题 85.

② 这两部纸草书现分别藏于伦敦大英博物馆和柏林博物馆. 这里“Kahun”是前一部纸草书被发现之地名.

③ Akhmim 即今之开罗.

④ 现藏于伦敦大英博物馆.

数的特殊记号,如 4 不再记成||||,而是用一道横线表示;7 也不再记成七条竖线,而是用一镰刀形符号 ℓ 来表示.[①]28 在象形文字中被表示为 ∩∩IIIIIIII,而在僧侣文中却被简单地写成 二ㅈ,值得注意的是这里把代表较小数字 8(即二个 4) 的符号(二) 置于左边而不是右边.

石器时代的人还用不到分数,但随着更先进的青铜文化的崛起,分数概念与分数记号也应运而生. 埃及象形文字用一种特殊的记号来表示单位分数即分子为 1 的分数:在整数上方简单地画一个长椭圆,就表示该整数的倒数. 这样,$\frac{1}{8}$ 记作 ⬭IIIIIIII,$\frac{1}{20}$ 则写成 ⬭∩∩. 而在纸草书中采用的僧侣文则用一点来代替长椭圆号,例如$\frac{1}{8}$ 记作 ⸱二,$\frac{1}{20}$ 则写成 ⸱ㅈ. 在多位数的情形,则点号置于最右边的数码之上.

单位分数的广泛使用成为埃及数学一个重要而有趣的特色. 埃及人将所有的真分数都表示为一些单位分数的和($\frac{2}{3}$ 例外,$\frac{2}{3}$ 在埃及算术运算中扮演着特殊角色,并用一个专门的记号来表示). 为了使这种分解过程做起来更为容易,莱茵德纸草书在阿姆士的前言之后给出了一张形如$\frac{2}{k}$(k 为从 5 到 101 的奇数) 的分数分解为单位分数之和的表. 其中$\frac{2}{5}$ 等价于$\frac{1}{3}$ 加$\frac{1}{15}$;$\frac{2}{11}$ 被写成$\frac{1}{6}$ 加$\frac{1}{66}$;……;最后一项是将$\frac{2}{101}$分解为$\frac{1}{101}$、$\frac{1}{202}$、$\frac{1}{303}$ 和$\frac{1}{606}$ 之和. 利用这张表,可以把例如$\frac{7}{29}$ 这样一个分数表示成单位分数之和:

$$\frac{7}{29}=\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{232}.$$

埃及人为什么对单位分数情有独钟,原因尚不清楚. 但无论如何,利用单位分数,分数的四则运算就可以进行,尽管做起来十分麻烦.

---

① 僧侣文中表示前 10 个正整数以及 20 的记号:

I	II	III	—	ꟷ	⟒	ℓ	二	ⅆ	∧	ㅈ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20

埃及人最基本的算术运算是加法.乘法运算是通过逐次加倍的程序来实现.例如69乘以19是这样来进行的:将69加倍得138;又将这个结果加倍得276;再加倍得552;再加倍得1104,此即69的16倍.因为$19=16+2+1$,所以69乘以19的答数应为$1104+138+69=1311$.在除法运算中,加倍程序被倒过来执行,即除数取代了被除数的地位而被拿来逐次加倍.

莱茵德纸草书中有些问题显示了埃及人运用加倍程序与单位分数概念而展开的熟练的计算技巧.例如第70题是求100除以$7+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$的商,答数$12+\frac{2}{3}+\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$是这样获得的:将除数逐次加倍,第一步得$15+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$;第二步得$31+\frac{1}{2}$;最后得63,此乃除数的8倍;另一方面,已知除数的$\frac{2}{3}$等于$5+\frac{1}{4}$,故除数与$8+4+\frac{2}{3}$相乘得$99\frac{3}{4}$,比已知乘积100小$\frac{1}{4}$.作者这时作了一个巧妙的调整:因为除数的8倍是63,所以它与$\frac{2}{63}$相乘得$\frac{1}{4}$.由$\frac{2}{n}$数表查得$\frac{2}{63}=\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$,于是就得到所求商数为$12+\frac{2}{3}+\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$.

纸草书中有些问题可以被归之于我们今天所说的代数学的范畴,它们相当于求解形如$x+ax=b$或$x+ax+bx=c$的一次方程.埃及人称未知数为"堆"(aha,读作"何").例如莱茵德纸草书第24题:已知"堆"与七分之一"堆"相加为19,求"堆"的值.纸草书的作者所用的解法实质上是一种算术方法,即现在所谓的"假位法"(mathod of false position):先假设一个特殊的数作为"堆"值(多半是假值),将其代入等号左边去运算,然后比较得数与应得结果,再通过比例方法算出正确答数.在上例中,数7作为未知数x的实验值,于是$x+\frac{1}{7}x=8$,而应得结果是19,这两个结果之比为$\frac{19}{8}$等于$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$,将7乘以$(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})$即得正确的"堆"值为$16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$.这种假位法是莱茵德纸草书中普遍使用的方法.

埃及几何学是尼罗河的赠礼.古希腊历史学家希罗多德在公元5世纪曾访问考察过埃及,并在其所著《历史》一书中写道:“西索斯特里斯……在埃及居民中进行了一次土地划分.……假如河水冲毁了一个人所得的任何一部分土地,国王就会派人去调查,并通过测量来确定损失地段的确切面积.……我认为,正是由于这类活动,埃及人首先懂得了几何学,后来又把它传给希腊人.”莱茵德纸草书和莫斯科纸草书中确实包含有许多几何性质的问题,内容大都与土地面积和谷堆体积的计算有关.

现存的纸草书中可以找到正方形、矩形、等腰梯形等图形面积的正确公式,例如莱茵德纸草书第52题,通过将等腰梯形转化为矩形的图形变换,得出了等腰梯形面积等于上、下底之和的一半乘以两底距离的结论.埃及人是否知道任何三角形的面积均为高与底乘积的一半,这一点尚不能完全确定,因为他们的三角形面积算法虽然总是涉及一数与另一数的一半相乘,但由于文字与图形的模糊不清,使人不能判明相乘的两个长度究竟是表示高与底还是代表两条边.在晚至约公元前2世纪的一份爱德夫(Edfu)地方契约中,记载有埃及人求任意四边形面积的公式,如果用a,b,c,d记四边形的四边长,该公式相当于

$$\frac{(a+b)}{2}\cdot\frac{(c+d)}{2},$$

这当然是十分粗略的近似.

埃及人对于圆面积则给出了很好的近似.莱茵德纸草书第50题假设一直径为9的圆形土地,其面积等于边长为8的正方形面积.如果与现代公式$s=\pi r^2$相比较,就相当于取π值为

$$\left(\frac{8\times 2}{9}\right)^2\approx 3.1605.$$

但没有证据表明纸草书的作者是否意识到这里的圆面积与正方形面积并非精确地相等,以及是否已有明确的圆周率概念.

埃及人在体积计算中达到了很高的水平,代表性例子是莫斯科纸草书第14题.这道题给出了计算平截头方锥体积的公式,用现代符号表示相当于:

$$V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2).$$

这里 h 是高，a，b 是底面正方形的边长.这个公式是精确的，并且具有对称的形式.在距今四千年前能够达到这样的成就是令人惊讶的，因此数学史家贝尔(E. T. Bell) 称莫斯科纸草书中的这个截棱锥体为“最伟大的埃及金字塔”[①]，虽然对于这一公式的来源尚存在着争议.

说到真实的金字塔，它们在建筑与定向方面的精确性[②]也曾引起人们对埃及几何学的高度赞美.然而我们在现存的埃及纸草书中，竟找不到任何证据说明古埃及人已经了解勾股定理哪怕是其特例.尽管如此，莱茵德纸草书中关于金字塔的一些问题具有特殊的意义，它们包括了初等三角的萌芽.在金字塔的建造中，保持斜面坡度的均匀性十分重要，这促使古埃及人引进了相当于角的正切的概念.他们用一个专门的术语“赛克特”(Seqt) 来表示一倾斜直线每升高一个单位时相当于垂线轴线的水平偏离.一金字塔斜面的“赛克特” 相当于平移与升高之比，亦即其底边的一半与高之比(如图 1.6)，其中水平移动以“掌”(palm)为单位，垂直升高以“肘”(cubit) 为单位(1 肘 = 7 掌).莱茵德纸草书第 56 题，就是要求一金字塔的赛克特，该金字塔高 250 肘，底面正方形边长为 360 肘.纸草书的作者首先用 2 除 360，再用 250 除所得结果，得 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}\right)$肘，此数再乘以 7，即算出赛克特数为 $5\frac{1}{25}$(掌 / 肘).莱茵德纸草书中其他金字塔问题给出的赛克特数是 $5\frac{1}{4}$，与齐奥普斯大金字塔的数据$\left(5\frac{1}{2}\right)$更为接近.

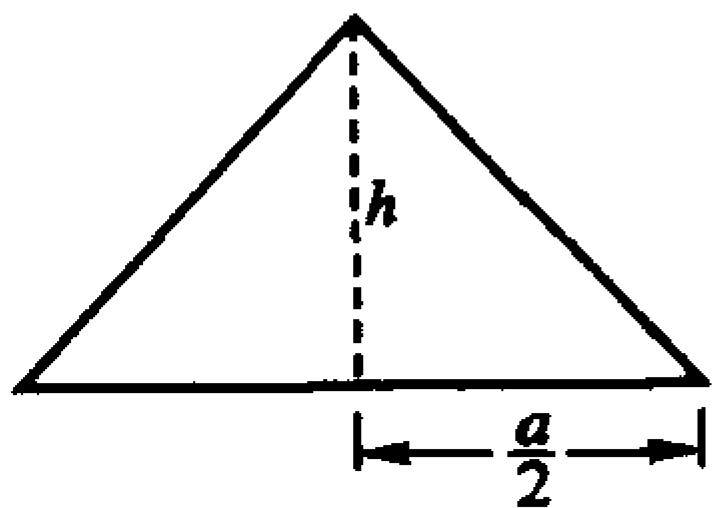


图 1.6

① 在英文中棱锥体和金字塔是同一个字：pyramid.

② 例如胡夫大金字塔底周长与高之比恰为 2π.

埃及数学是实用数学.古埃及人没有命题证明的思想,不过他们常常对问题的数值结果加以验证.另外虽然纸草书中的问题绝大部分都是实用性质,但也有个别例外,例如莱茵德纸草书第79题:

"7座房,49只猫,343只老鼠,2401棵麦穗,16 807赫卡特[①]",有人认为这是当时的一个数谜:7座房子,每座房子里养7只猫,每只猫抓7只老鼠,每只老鼠吃7棵麦穗,每棵麦穗可产7赫卡特粮食,问房子、猫、老鼠、麦穗和粮食各数之总和.也有人将房子、猫等解释为纸草书作者赋予不同幂次的名称,即房子表示一次幂,猫表示二次幂,等等.无论如何,这是一个没有任何实际意义的几何级数求和问题,带有虚构的数学游戏性质.

埃及文明在历代王朝更迭中表现出一种静止的特性,这种静止特性也反映在埃及数学的发展中.莱茵德纸草书和莫斯科纸草书中的数学,就像祖传家宝一样世代相传,在数千年漫长的岁月中很少变化.加法运算和单位分数始终是埃及算术的砖块,使古埃及人的计算显得笨重繁复.古埃及人的面积、体积算法对精确公式与近似关系往往不作明确区分,这又使他们的实用几何带上了粗糙的色彩.这一切都阻碍埃及数学向更高的水平发展.公元前4世纪希腊人征服埃及以后,这一古老的数学文化完全被蒸蒸日上的希腊数学所取代.

1.2.2 美索不达米亚数学

汹涌湍急的底格里斯河与幼发拉底河所灌溉的美索不达米亚平原,也是人类文明的发祥地之一.早在公元前四千年,苏美尔人就在这里建立起城邦国家并创造了文字.与尼罗河谷不同的是,两河流域这片四面开放的新月沃土带,长期以来成为许多不同民族争霸称雄的战场.自从公元前24世纪中叶阿卡德人第一次入侵建立阿卡德王国(约公元前2371—前2230),以后又有阿摩利人、加喜特人、依兰人、赫梯人、亚述人、伽勒底人和波斯人等相继登上统治舞台.令人惊异的是,两河流域在

---

① 赫卡特(hekat):古埃及容量单位,此处表示以赫卡特为单位计量的粮食.

这种错综复杂的民族战乱中却维系着高度统一的文化，史称“美索不达米亚文明”[1]，楔形文字的使用可能是这种文化统一的粘合剂.

两河流域的居民用尖芦管在湿泥版上刻写楔形文字，然后将泥版晒干或烘干，这样制成的泥版文书比埃及纸草书易于保存.迄今已有约50万块泥版文书出土，它们成为我们了解古代美索不达米亚文明的主要文献.对楔形文字的释读比埃及文字要晚，关键的一步是在19世纪70年代迈出的，当时发现的贝希斯敦(Behistun)石崖，上面用三种文字记载着波斯王大流士一世的战功，这三种文字是波斯文、埃及文和巴比伦文.对波斯文的知识使人们得以揭开古巴比伦文字的奥秘.对泥版文书中数学内容的释读则一直到1926—1950年才取得突破，这主要是靠了法国人娣罗－丹金(Thureau-Dangin)夫人和美籍德国学者诺依格包尔(O. Neugebauer)的开创性工作.

现存泥版文书中大约有300多块是数学文献.奇怪的是它们主要分属两个相隔遥远的时期：有一大批是公元前二千纪头几个世纪(古巴比伦王国时代)的遗物，还有许多泥版文书则来自公元前一千纪的后半期(新巴比伦王国和波斯塞琉古时代)，对这些泥版文书的研究揭示了一个远较古埃及人先进的美索不达米亚早期数学文化.

大多数文明普遍采用十进制，但美索不达米亚人却创造了一套以60进制为主的楔形文记数系统.这种记数制对60以内的整数采用简单十进累记法，例如59记作𒐐𒐝.对于大于59的数，美索不达米亚人则采用六十进制的位值记法.同一个记号，根据它在数字表示中的相对位置而赋予不同的值，这种位值原理是美索不达米亚数学的一项突出成就.位置的区分是靠在不同楔形记号组之间留空.例如𒐖 𒐖 𒐖这一写法中，右边的𒐖表示2个单位；中间的𒐖表示基数(60)的2倍；而左边的𒐖则表示基数(60)的平方的二倍，因此这个数字是指$2\times(60)^2+2\times(60)+2$，用十进制写出来就是7322.这种位值制是不彻底的，因为其中没有零号.这样，美索不达米亚人表示122和7202的

① 美索不达米亚文明在习惯上往往被称为“巴比伦文明”，这一名称并不确切，因为巴比伦城最初不是，后来也不总是两河流域文化的中心.

形式是相同的，人们只能根据上、下文来消除二义性．不过在公元前 3 世纪的泥版文书中开始出现一个专门的记号，用来表示没有数字的空位．这记号是由两个斜置的小楔形组成．有了这个空位记号，人们就很容易将数𒐖𒑊𒐖 $(2(60)^2+0(60)+2)$与𒐖 𒐖区分开来了．当然，这样的“准”零号并未能彻底消除混乱，因为在现存的泥版文书中没有发现零号置于尾端的情形．因此，𒐖 𒐖 这个记号仍然可以表示形如 $2(60)^k+2(60)^{k-1}$（$k\geqslant 1$ 为整数）的无限多个数中的任何一个．美索不达米亚人从未实施过绝对的位值制．

美索不达米亚人的记数制远胜埃及象形数字之处，还在于他们巧妙地将位值原理推广应用到整数以外的分数．这就是说，𒐖 𒐖 不仅表示 $2(60)+2$，同时也可以表示 $2+2(60)^{-1}$，$2(60)^{-1}+2(60)^{-2}$ 以及其他取相似形式的分数．因此，美索不达米亚人对分数跟对整数一样能够运算自如，而不像古埃及人那样受着单位分数的束缚．

美索不达米亚人长于计算，这不只是与他们优良的记数系统有关．美索不达米亚的学者还表现出发展程序化算法的熟练技巧．他们创造了许多成熟的算法，开方根计算就是有代表性的例子之一．这种开方程序既简单又有效：设 $x=\sqrt{a}$ 是所求平方根，并设 a_1 是这根的首次近似；由方程 $b_1=a/a_1$ 求出第二次近似 b_1，若 a_1 偏小，则 b_1 偏大，反之亦然．取算术平均值 $a_2=\frac{1}{2}(a_1+b_1)$ 为下一步近似，因为 a_2 总是偏大，再下一步近似 $b_2=a/a_2$ 必偏小，取算术平均 $a_3=\frac{1}{2}(a_2+b_2)$ 将得到更好的结果．这一程序实际上可以无限继续下去．耶鲁大学收藏的一块古巴比伦泥版（编号 7289），其上载有$\sqrt{2}$ 的近似值，结果准确到六十进制三位小数，用现代符号写出来是 $1;24,51,10\approx 1.414\,213$，是相当精确的逼近，它相当于按上述程序取 $a_1=1;30$ 而算得的近似值 a_3．

美索不达米亚人还经常利用各种数表来进行计算，使计算更加简捷．例如，他们做除法不是用埃及人那样的倍加倍方法，而是采用了将被除数乘以除数的倒数这一途径，倒数则通过查表而得．在现有的 300 多块数学泥版文书中，就有 200 多块是数学用表，包括乘法表、倒数表、平方表、立方表、平方根表、立方根表，甚至还有指数（对数）表．例如有一块

泥版文书上列有 16 的四分之一次、二分之一次、四分之三次和一次幂:

$$16^{0;15} = 2$$
$$16^{0;30} = 4$$
$$16^{0;45} = 8$$
$$16^{1} = 16$$

这相当于以 16 为底的对数表.但美索不达米亚人并不固定地使用某个数为底数,同时所列数字的间距也远比今天的表大.这些古代对数表并不是以简化计算为一般目的,而是为了解决某些特殊问题如复利问题而设.例如一块泥版文书中有这样的问题:若年利率为 20%,使本金翻倍需要多少年?答数为 3;47,13,20,解法是利用复利公式$a = p(1+r)^n$ ($r = 20\%$ 或 0;12),同时查阅以 1;12 为底的指数表,最后通过在值$(1;12)^3$ 和$(1;12)^4$ 之间进行线性插值而得到结果.一些古巴比伦时代的数学泥版文书表明巴比伦人对线性内插法是驾轻就熟的.

美索不达米亚数学在代数领域内达到了相当的高度.埃及代数主要是讨论线性方程,对于二次方程则仅涉及到最简单的情形($ax^2 = b$).而来自古巴比伦时代的一些泥版文书则表明,巴比伦人已能卓有成效地处理相当一般的三项二次方程.例如耶鲁大学收藏的一块泥版文书中有这样的问题:

“已知依几布姆(igibum)比依古姆(igum)大 7.问依几布姆和依古姆各为多少?”

这里 igibum 和 igum 是古巴比伦数学文献中表示互为倒数的两个数的专有术语,在十进制中则相当于乘积为 60 之幂的两个数.若以 x 表示 igibum,y 表示 igum,则该题相当于求解方程组

$$\begin{cases} xy = 1,0 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

这又相当于先求解一个一元二次方程

$$x^2 - 7x - 1,0 = 0.$$

题中给出的算法相当于

$$x = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 1,0} + \frac{7}{2} = 12,$$

也就是我们今天熟知的二次方程 $x^2 - px - q = 0$ 的求根公式

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}.$$

由于正系数二次方程没有正根，因此在古代与中世纪，甚至在近代早期，二次方程一直是被分成以下三类(其中 $p > 0, q > 0$)：

$$\text{(i)}\quad x^2 + px = q$$
$$\text{(ii)}\quad x^2 = px + q$$
$$\text{(iii)}\quad x^2 + q = px$$

来研究.所有这三类方程在古巴比伦泥版文书中都可以找到，并都给出了正确的解算程序.

古埃及人没有留下解三次方程的记录，美索不达米亚泥版文书中却不乏三次方程的例子.像 $x^3 = a$ 这样的纯三次方程，主要是通过查立方表或立方根表来求解.形如 $x^3 + x^2 = a$ 的混合三次方程也是藉现成的表来求解.巴比伦人编有专门的 $n^3 + n^2$ 的数值表(其中 n 为整数).对于更一般的三次方程如 $144x^3 + 12x^2 = 21$，巴比伦数学家运用了代换的方法去求解：用 12 乘方程两端，并设 $y = 12x$，方程就化为

$$y^3 + y^2 = 4,\ 12,$$

查表得 $y = 6$，因此 $x = 0;30$.在没有现代符号的情况下，能够认识到方程 $(ax)^3 + (ax)^2 = b$ 与方程 $y^3 + y^2 = b$ 本质上属于同一类型，这种初等的代数变换思想，在当时是了不起的成就.

美索不达米亚几何也是与测量等实际问题相联系的数值计算.美索不达米亚学者已掌握三角形、梯形等平面图形面积和棱柱、平截头方锥等一些立体图形体积的公式.他们还知道并利用图形的相似性概念.耶鲁大学收藏的一块泥版文书上有一个问题可以用现代语言表述如下：如图 1.7 之三角形 ABC，$\angle B = 90°$，$AB /\!/ DE$.已知 $BD = l = 20$，$DC = l' = 30$，梯形 $ABDE$ 的面积 $S = 5,20$.求"上宽" $AB(w_u)$ 和"下宽" $DE(w_l)$.根据题意应有

$$S = \frac{1}{2}(w_u + w_l) \cdot l,$$

即

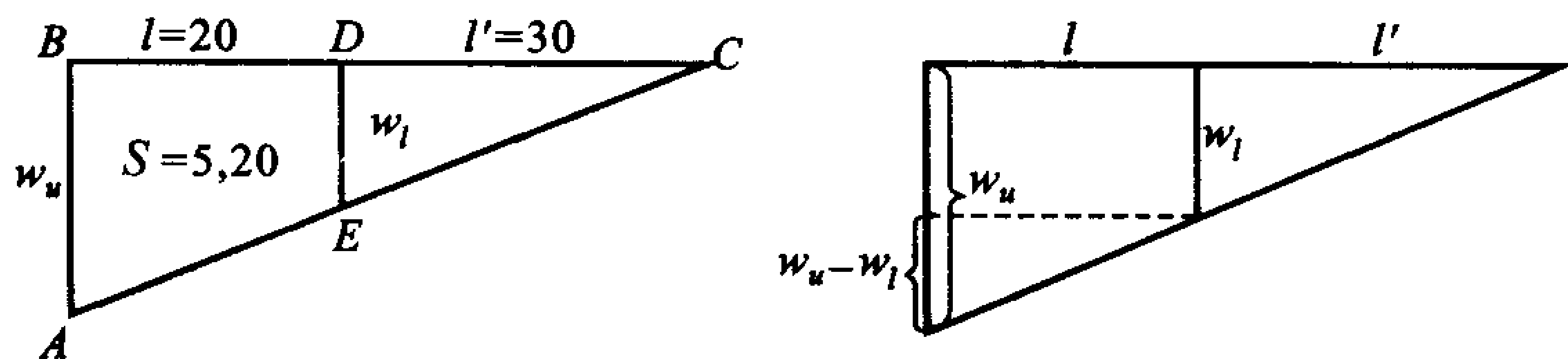


图 1.7

(i) $\frac{1}{2}(w_u + w_l) = \frac{S}{l}$.

利用相似三角形对应边成比例的性质可得

$$\frac{w_u}{l + l'} = \frac{w_l}{l'} = \frac{w_u - w_l}{l}$$

即

$$\text{(ii)}\ \frac{1}{2}(w_u - w_l) = \frac{(w_u + w_l) \cdot l}{2(2l' + l)} = \frac{S}{2l' + l},$$

而

$$\text{(iii)}\ \frac{1}{2}(w_u + w_l) + \frac{1}{2}(w_u - w_l) = w_u,$$

$$\text{(iv)}\ \frac{1}{2}(w_u + w_l) - \frac{1}{2}(w_u - w_l) = w_l.$$

泥版文书给出的计算程序就是遵循了上述的关系式(i)、(ii)、(iii)、(iv),所得结果是:上宽 $w_u = 20$,下宽 $w_l = 12$.

美索不达米亚几何与埃及几何有一个相同的缺陷,即对准确公式与近似关系混淆不分.一个有趣的巧合是:巴比伦人的四边形面积公式也是两组对边边长算术平均之积.巴比伦人甚至对平截头体积计算有时也采用近似公式,如等于上、下底面积的算术平均乘以高.不过对于上下底面积分别为 a^2 和 b^2 的平截头方锥,有的泥版文书上也记载了相当于下式的计算法则:

$$V = h\left[\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a - b}{2}\right)^2\right],$$

这是一个准确的公式,并可化为埃及人的形式.

在美索不达米亚河谷地区,圆面积通常被取作为半径平方的三倍,也就是说取圆周率 π 为 3,其精确度自然在埃及人之下.不过 1936 年在

离巴比伦城300多公里的苏萨地方出土的一块泥版文书给出了正方形与其外接圆周长之比等于0;57,36,由此可知巴比伦时代学者采用$3\frac{1}{8}$作为π的近似值,与埃及人至少旗鼓相当.

即使是古巴比伦时代的泥版文书也都说明勾股定理在当时的美索不达米亚地区已广泛使用.例如有一块泥版文书上有这样一个问题:倚墙而立的木杆长0;30尺,若上端下滑0;6尺,问其下端将移离墙多远?作者运用勾股定理求出了正确答案0;18.

有一些泥版文书上的数学问题说明美索不达米亚数学除了实用的动机外,有时也表现出理论兴趣.这方面最典型的例子是一块叫"普林顿322"的泥版文书.该泥版文书最初来源不明,因曾被一位叫普林顿(G. A. Plimpton)的人收藏而得名(322是普林顿的收藏编号),现存美国哥伦比亚大学图书馆(图1.8).

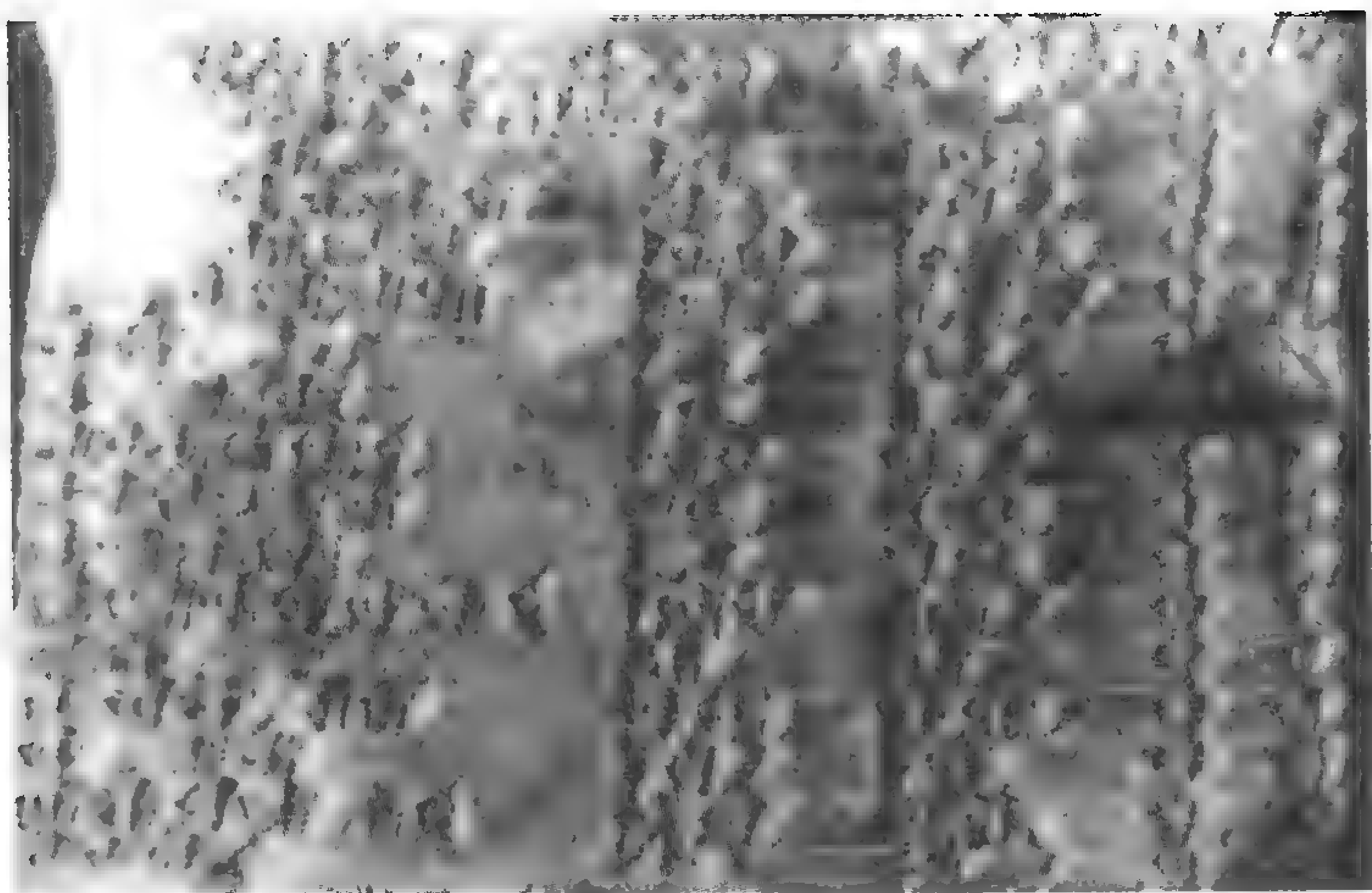


图1.8　普林顿322

普林顿322是一块更大的泥版文书的右半部分,其左边缘断裂处有现代胶水痕迹,说明缺损的左半部分是在出土后丢失的.现存部分长12.7 cm,宽8.8 cm,上面记载的文字属古巴比伦语,因此其年代当在公元前1600年以前.

普林顿 322 实际上是一张表格，由 4 列 15 行六十进制数字组成：

Ⅳ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅰ
[1,59],15	1,59	2,49	1
[1,56,56],58,14,50,6,15	56,7	3,12,1*	2
[1,55,7],41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
[1],5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
[1],48,54,1,40	1,5	1,37	[5]
[1],47,6,41,40	5,19	8,1	[6]
[1],43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
[1],41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
[1],38,33,36,36	9,1*	12,49	9
[1],35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
[1],33,45	45	1,15	11
[1],29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
[1],27,3,45	7,12,1*	4,49	13
[1],25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
[1],23,13,46,4[0]	56	53*	[15]

（注：表中带方括号的数字是诺依格包尔添补的）

在相当长的时间内，普林顿 322 一直被认为是一张商业帐目表而未受重视. 1945 年，诺依格包尔首先揭示了普林顿 322 的数论意义，从而引起了人们对它的极大兴趣.

根据诺依格包尔等人的研究，普林顿 322 数表与所谓"整勾股数"有关. 满足关系式 $a^2+b^2=c^2$ 的一组整数 (a,b,c) 叫整勾股数，西方文献中也称"毕达哥拉斯数". 从几何上看，每一组毕达哥拉斯数皆构成某个所谓"毕达哥拉斯三角形"（即具有整数边长的直角三角形）的三条边长. 计算表明：普林顿 322 数表第 Ⅱ、Ⅲ 列的相应数字，恰好构成了毕达哥拉斯三角形中的斜边 c 与直角边 b. 只有四处例外，即第 2,9,13,15 行. 诺依格包尔将它们解释为某种笔误，并将表中相应行上带 * 的数字(3,12,1)、(9,1)、(7,12,1) 和 53 分别修正为(1,20,25)、(8,1)、(2,41) 和(1,46).

至于第 Ⅳ 列数字（以下记作 s），诺依格包尔在恰当补出空缺数字后发现有如下关系：$s=\left(\frac{c}{a}\right)^2$，即 s 相当于 b 边所对角的正割平方. 进

一步的计算还表明：表中比值$\frac{c}{a}$以大约0;1的间距均匀递减，相应的夹角则以约1°的间距从45°减至31°.因此，普林顿322的第Ⅳ列数字实际上给出了一张从31°至45°的正割三角函数平方表，这可能是为了天文或工程计算的需要而设计的，但为什么用正割平方而不用正割本身，这一点仍然是个疑案.

一个自然的问题是普林顿322表中的数字是怎样算出来的？我们今天知道，所有的素毕达哥拉斯数组(a,b,c)都可用以下参数形式表出：

$$a = 2pq, \quad b = p^2 - q^2, \quad c = p^2 + q^2.$$

其中p,q互素，$p > q$且不同时为奇数.种种迹象说明，古巴比伦人可能就是通过上述法则来产生普林顿322表中的有关数字的.如果由勾股定理推得毕达哥拉斯三角形的另一条直角边a，再算出能按上述法则产生普林顿322表中b,c诸值的相应的p,q，我们将会发现：除了个别行(第11,15行)外，所有各行的b,c与相应的a都互素，并且所有的p,q其倒数都可表成有限的六十进小数，这些都不能简单地说成是偶合.学者们推测，普林顿322丢失的左半部分很可能列有p,q与a的相应数值.

普林顿322是古代巴比伦最异彩夺目却又相对孤立的一块数学泥版文书.对它的解释带有推测的成分并存在争议.对美索不达米亚数学的理论水平不宜过分渲染.总的来说，古代美索不达米亚数学与埃及数学一样主要是解决各类具体问题的实用知识，处于原始算法积累时期.几何学作为一门独立的学问甚至还不存在.埃及纸草书和巴比伦泥版文书中汇集的各种几何图形面积、体积的计算法则，本质上属于算术的应用.当然，古代实用算法积累到一定阶段，对它们进行系统整理与理论概括必然形成趋势，但这一任务并不是由早期河谷文明本身来担当的.向理论数学的过渡，是大约公元前6世纪在地中海沿岸开始的，那里一个崭新的、更加开放的文明——历史学家常称"海洋文明"，带来了初等数学的第一个黄金时代——以论证几何为主的希腊数学时代.

古代希腊数学 2

希腊数学一般指从公元前 600 年至公元 600 年间，活动于希腊半岛、爱琴海区域、马其顿与色雷斯地区、意大利半岛、小亚细亚以及非州北部的数学家们创造的数学.

古希腊人也叫海仑人(Hellene)，其历史可以追溯到公元前 2000 年.当时，作为希腊先民的一些原始部落由北向南挺进，在希腊半岛定居，后来又逐步向爱琴海诸岛和小亚细亚扩张.到公元前 600 年左右，希腊人已散布于地中海与黑海沿岸的大部分地区，正是在这一带掀起了新的数学浪潮.在这方面，这些海滨移民具有两大优势.首先，他们具有典型的开拓精神，对于所接触的事物，不愿因袭传统；其次，他们身处与两大河谷毗邻之地，易于汲取那里的文化.大批游历埃及和美索不达米亚的希腊商人、学者带回了从那里收集的数学知识，在古代希腊城邦社会特有的唯理主义气氛中，这些经验的算术与几何法则被加工升华为具有初步逻辑结构的论证数学体系.

2.1 论证数学的发端

2.1.1 泰勒斯与毕达哥拉斯

现在所知最早的希腊数学家是泰勒斯(Thales of Miletus，约公元

前 625—前 547).泰勒斯出生于小亚细亚(今土耳其)西部爱奥尼亚地方的米利都城,他领导的爱奥尼亚学派据说开了希腊命题证明之先河.不过,关于泰勒斯并没有确凿的传记资料留传下来,我们对他在数学上的贡献的最可靠的证据是来自公元 5 世纪新柏拉图派哲学家普洛克鲁斯(Proclus,410—485)所著《欧几里得〈原本〉[①]第一卷评注》一书,《评注》开始部分援引罗德岛的欧多谟斯(Eudemus of Rhodes,约公元前 320)所撰《几何学史》的内容摘要说:

"……(泰勒斯)首先来到埃及,然后将几何研究引进希腊.他本人发现了许多命题,并指导学生研究那些可以推出其他命题的基本原理".

普洛克鲁斯在《评注》其他地方再次根据欧多谟斯的著作介绍说泰勒斯曾证明了下列四条定理:

1.圆的直径将圆分为两个相等的部分;
2.等腰三角形两底角相等;
3.两相交直线形成的对顶角相等;
4.如果一三角形有两角、一边分别与另一三角形的对应角、边相等,那么这两个三角形全等.

传说泰勒斯还证明了现称"泰勒斯定理"的命题:半圆上的圆周角是直角.

尽管没有任何第一手文献可以证实泰勒斯的这些成就,但上述间接的记载却流传至今,使泰勒斯获得了第一位数学家和论证几何学鼻祖的美名.

关于泰勒斯,还有一些其他的零星传说.根据这些传说,泰勒斯早年经商,因进行橄榄榨油机生意而发了大财;在埃及,泰勒斯测量过金字塔的高:利用一根垂直立竿,当竿长与影长相等时,通过观测金字塔的日影来确定其高;在巴比伦,泰勒斯接触了那里的天文表和测量仪器,并预报了公元前 585 年的一次日蚀,等等.

① 在我国,《原本》常被译为《几何原本》,"几何"二字是 1607 年徐光启、利玛窦的中译本所加.

希腊论证数学的另一位祖师是毕达哥拉斯(Pythagoras of Samos,约公元前 580—前 500).毕达哥拉斯与泰勒斯一样也是扑朔迷离的传说人物.二者都没有著作留世,我们甚至不知道他们是否写过书面的著作.今人对毕拉哥拉斯生平与工作的了解,主要也是通过普洛克鲁斯等人关于希腊数学著作的评注,另外还有如柏拉图、希罗多德的著述也提供了一些信息.根据这些间接的资料,我们知道毕达哥拉斯生于靠近小亚细亚西部海岸的萨摩斯岛,年青时曾游历埃及和巴比伦,可能还到过印度,回希腊后定居于当时的大希腊(Magna Graecia),即今意大利东南沿海的克洛托内(Crotone),并在那里建立了一个秘密会社,也就是今天所称的毕达哥拉斯学派.这是一个宗教式的组织,但致力于哲学与数学的研究,相传"哲学"(希腊原词 *φιλοσοφια* 意为"智力爱好")和"数学"(希腊原词 *μαθηματιχα*,意为"可学到的知识")这两个词正是毕达哥拉斯本人所创.

虽然泰勒斯沿着论证数学的方向迈出了第一步,但希腊数学著作的评注者们主要是将数学中这一新方向的成长归功于毕达哥拉斯学派.前面所引普洛克鲁斯的著述在介绍了泰勒斯的几何工作后就接着写道:

"毕达哥拉斯继泰勒斯之后,将这门科学改造为自由的教育形式,首先检验其原理,并用一种无形和理智的方式探讨其定理."

一般认为,欧几里得《原本》前二卷的大部分材料来源于毕达哥拉斯学派.这种看法带有很大的推测成分,包括西方文献中一直以毕达哥拉斯的名字命名的勾股定理,据传毕达哥拉斯学派为了庆祝这条定理的发现,曾宰牛祭神(甚至有传说宰了一百头牛),但迄今并没有毕达哥拉斯发现和证明了勾股定理的直接证据.上述宰牛传说最早出自公元前 2 世纪希腊学者阿波罗多罗斯(Apollodorus)的《希腊编年史》,不过阿波罗多罗斯并未明说是哪条定理,并且后来人们指出宰牛之说与毕拉哥拉斯学派奉行的素食主义相违.尽管如此,人们仍然对毕达哥拉斯证明勾股定理的方法给出了种种猜测,其中最著名的是普鲁塔克(Plutarch,约 46—120)的面积剖分法.如图 2.1,设直角三角形的两直角边与斜边分别为 a,b,c.以此直角三角形为基础作出两个边长为 $a+b$ 的正方形.由于这两个正方形内各含有四个与原来的直角三角

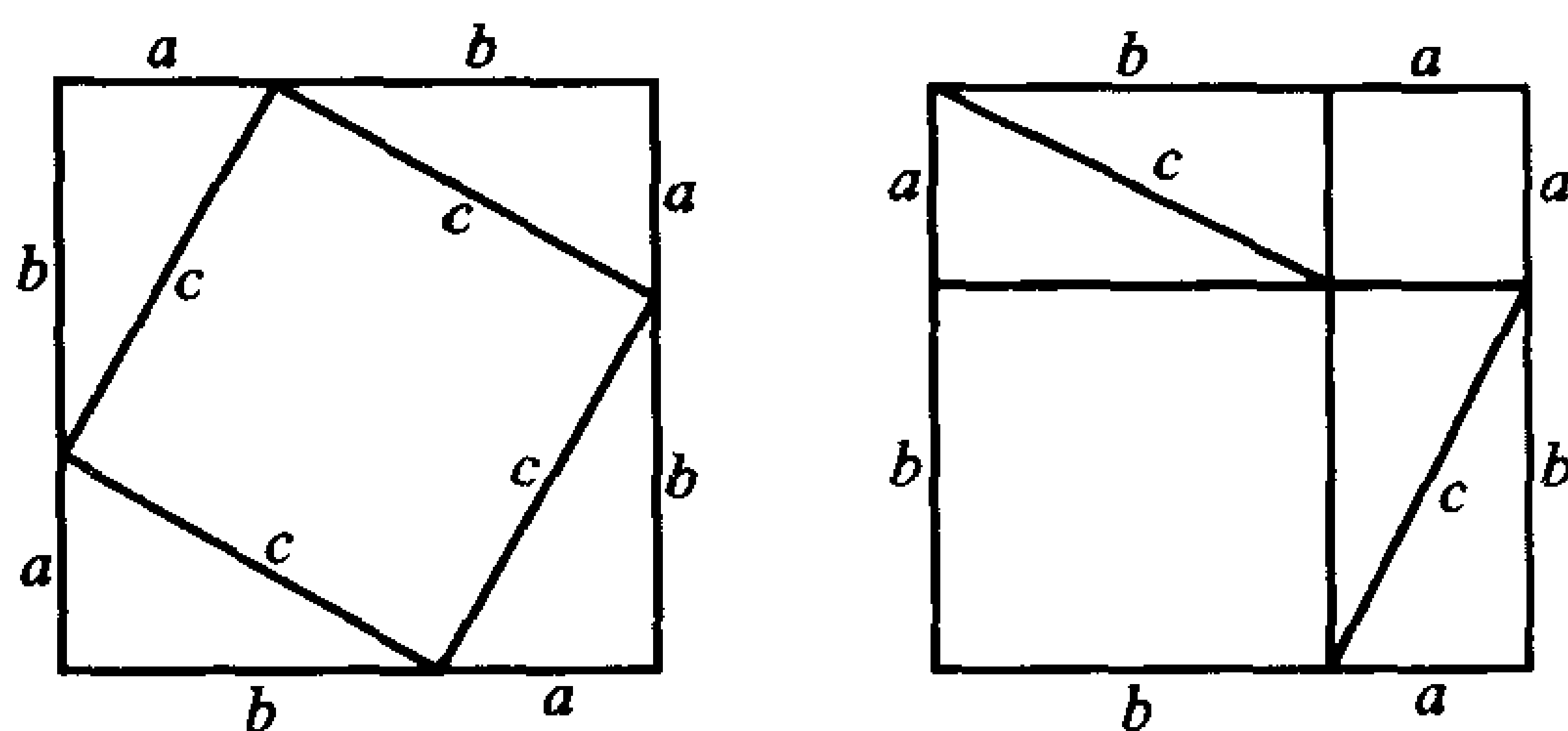


图 2.1

形全等的三角形,除去这些三角形后,两个图形剩余部分的面积显然应该相等,即第一个图形中以斜边 c 为边的正方形面积等于第二个图形中以直角边 a 和 b 为边的两个正方形面积之和,这就是勾股定理.毕达哥拉斯本人是否确用这种方法证明勾股定理,这件事很值得怀疑.

毕达哥拉斯学派另一项几何成就是正多面体作图,他们称正多面体为"宇宙形".我们今天知道在三维空间中正多面体仅有五种——正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体.欧几里得《原本》第 8 卷的附注指出:"其中三个(正四、六、八面体)应归功于毕达哥拉斯学派,而十二面体和二十面体则应归功于蒂奥泰德".蒂奥泰德(Theaetetus 公元前 417—前 369)是晚期毕达哥拉斯学派成员西奥多罗斯(Theodorus,约公元前 465—前 399)的学生,深受毕达哥拉斯学派思想的影响.因此,一般认为所有正多面体的作图都与毕达哥拉斯学派有关.1885 年以后在意大利帕多瓦等多处出土石制正十二面体,年代考定在公元前 500 年以前,为这种看法提供了佐证.在所有的正多面体中,正十二面体的作图是最为诱人的问题,因为它是由正五边形围成,而其他正多面体都是以三角形或正方形为界面,正五边形的作图则与著名的"黄金分割"问题有关.如图 2.2.正五边形 $ABCDE$ 的五条对角线分别相交于点 A'、B'、C'、D'、E',这些交点以一种特殊的方式分割对角线:每条对角线都被交点分成两条不相等的线

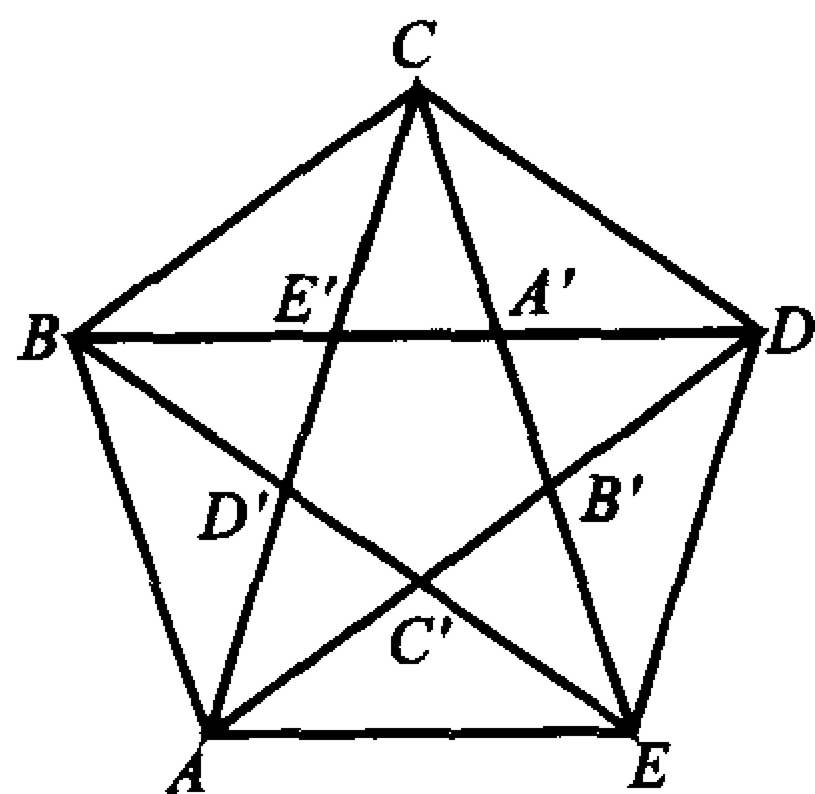


图 2.2

段，使该对角线的整体与较长部分之比等于较长部分与较短部分之比．这就是所谓“黄金分割”．毕达哥拉斯学派应该知道这种分割的性质，并且据说他们正是以正五边形的五条对角线构成的五角星形作为自己学派的标志．当然我们并不知道毕达哥拉斯学派是用什么方法求解黄金分割的，“黄金分割”这个名称①也不是来自该学派．

尽管人们将许多几何成就归功于毕达哥拉斯学派，但这个学派基本的信条却是：“万物皆数”．关于这一点，毕达哥拉斯本人的原话不得而知，但这个学派的一位晚期成员费洛罗斯（Philolaus，约卒于公元前390年）确曾明白地宣称：

“人们所知道的一切事物都包含数；因此，没有数就既不可能表达、也不可能理解任何事物”．

毕达哥拉斯学派所说的数仅指整数，分数是被看成两个整数之比的关系．他们认为数1生成所有的数，并命之为“原因数”（Number of Reason）．每个数都被赋予了特定的属性，而在一切数中最神圣的是10，也就是说毕达哥拉斯学派信奉和崇拜数10，将10看成是完美、和谐的标志．他们对数进行分类，除了偶数与奇数，有时还提到奇－奇数和偶－奇数，根据所讨论的数是两个奇数之积还是一个偶数与一个奇数之积而定．据说毕达哥拉斯学派还定义了“完全数”、过剩数和不足数：一个数是完全数、过剩数还是不足数，分别视其因数②之和等于、大于或小于该数本身而定（6是最小的完全数，下一个完全数是28，等等）．“亲和数”的概念也被归功于毕达哥拉斯学派．两个整数 a 和 b 被称为是亲和数，若 a 是 b 的因数之和而 b 又是 a 的因数之和（最小的一对亲和数是220和284）．

毕达哥拉斯学派关于“形数”的研究，强烈地反映了他们将数作为几何思维元素的精神．诸如3，6，10，15之类的数，或一般地由公式

$$N = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

---

① “黄金分割”这一术语在希腊人之后两千多年才起用，它首先出现在德国数学家M.欧姆（Ohm，1792—1872）的著作《纯粹初等数学》（Die reine Elementar－Mathematik）第2版中．

② 注意毕达哥拉斯学派在这里将1看成是一个数的因数，而该数本身则不是它的因数．

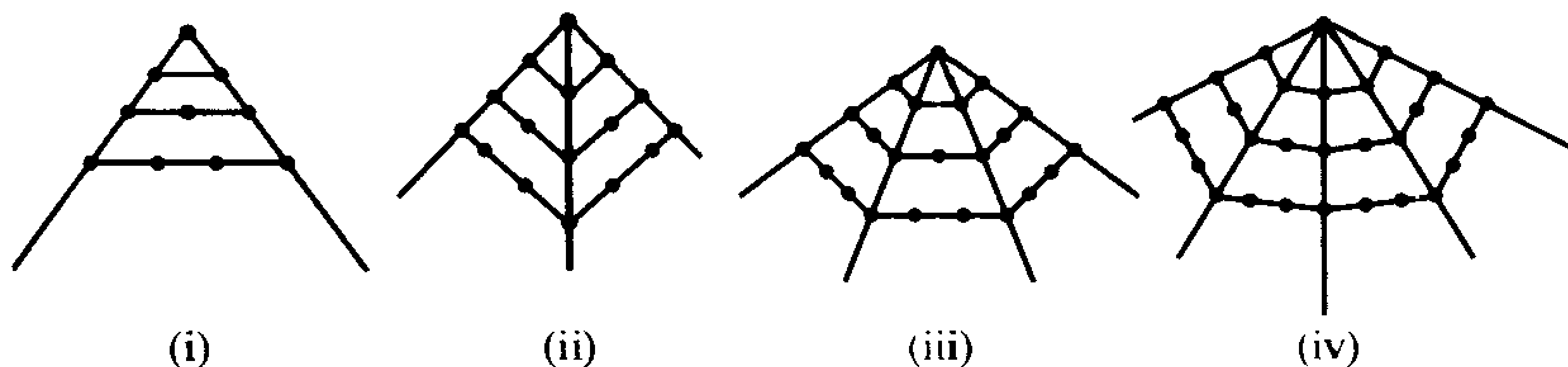


图 2.3

给出的数称为"三角形数"[图 2.3(i)],它们可以用某种三角点式来表示;由序列

$$N = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$$

形成一系列"正方形数"[图 2.3(ii)],其中每个奇数又被看成是形如土圭(gnomon)的点式,位于前一正方形点式的两边.偶数序列 $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$ 则产生所谓"长方形数",每个长方形数都等于某三角形数的 2 倍.五边形数[图 2.3(iii)]和六边形数[图 2.3(iv)]分别由序列

$$N = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

和

$$N = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = 2n^2 - n$$

得到,这是一些高阶等差序列.用同样的方式可以定义所有的多边形数.这一过程还可以推广到三维空间去构造多面体数."形数"体现了数与形的结合.数形结合的另一个典型例子是由

$$\frac{m^2 - 1}{2}, m, \frac{m^2 + 1}{2} (m \text{ 为奇整数})$$

给出的毕达哥拉斯三元数组,它们分别表示一个直角三角形的两条直角边和斜边,与勾股定理密切相关.当然,这一公式未能给出全部毕达哥拉斯数组,并且如第 1 章所述,巴比伦人已经知道这样的数组.

毕达哥拉斯学派数字神秘主义的外壳,包含着理性的内核.首先,它加强了数概念中的理论倾向,如果说埃及与巴比伦算术主要是实用的数字计算技巧,那么毕达哥拉斯学派算术则更多地成为某种初等数论的智力领域,这是向理论数学过渡时观念上的飞跃,并且由于数形结

合的观点，这种飞跃实质上推动了几何学的抽象化倾向. 其次，“万物皆数”的信念，使毕达哥拉斯学派成为相信自然现象可以通过数学来理解的先驱. 他们用数的理论解释天体运动，发现音乐定律等等. 一个广泛流传的例子是毕达哥拉斯关于和声的研究：他注意到如果振动弦的长度可表示成简单的整数比，这时发出的将是和音，如2∶3(五度和音)或3∶4(四度和音)等等. 这大概是最早的数学物理定律了.

毕达哥拉斯相信任何量都可以表示成两个整数之比(即某个有理量). 在几何上这相当于说：对于任何两条给定的线段，总能找到某第三线段，以它为单位线段能将给定的两条线段划分为整数段. 希腊人称这样两条给定线段为“可公度量”，意即有公共的度量单位. 然而毕达哥拉斯学派后来却发现：并不是任意两条线段都是可公度的，存在着不可公度的线段，例如正方形的对角线和其一边就构成不可公度线段. 这一事实的证明，最早出现在亚里士多德的著作中：根据勾股定理，若正方形对角线与其一边之比为 $\alpha:\beta$(α,β 互素)，则有 $\alpha^2=2\beta^2$. 这里 α^2 为偶数，则 α 也必为偶数，设 $\alpha=2\rho$，于是 $\alpha^2=4\rho^2=2\beta^2$，即 $\beta^2=2\rho^2$，β^2 为偶数，则 β 也必为偶数，这与 α,β 互素的假设相矛盾，因此正方形对角线与其一边不可公度. 这一证明与我们今天证明 $\sqrt{2}$ 为无理数的方法相同，亚里士多德声明这来源于毕达哥拉斯学派. 不过由于毕达哥拉斯学派有严密的教规，将一切发现归功于学派的领袖，并禁止公开学派的秘密，因此我们对毕达哥拉斯学派的介绍，很难将毕达哥拉斯本人的工作与其他成员的贡献区分开来. 有关不可公度量的发现，情形也是如此. 一个传说是学派成员希帕苏斯(Hippasus，公元前470年左右)首先发现了不可公度性，当时毕氏学派正在海上泛舟集会，希帕苏斯说出他的发现后，惊恐不已的其他成员将他抛进了大海(一说希帕苏斯因泄露了不可公度量的秘密而遭此厄运).

毕达哥拉斯学派认为宇宙万物皆依赖于整数的信条，由于不可公度量的发现而受到了动摇. 据柏拉图记载，后来又发现了除 $\sqrt{2}$ 以外的其他一些无理数. 这些“怪物”深深地困惑着古希腊的数学家，希腊数学中出现的这一逻辑困难，有时也被称为“第一次数学危机”. 大约一个世纪以后，这一“危机”才由于毕达哥拉斯学派成员阿契塔斯

(Archytas) 的学生欧多克斯(Eudoxus) 提出的新比例理论而暂时消除(见2.2).

2.1.2 雅典时期的希腊数学

毕达哥拉斯学派在政治上倾向于贵族制,在希腊民主力量高涨时期受到冲击并逐渐解体.毕达哥拉斯本人也逃离克洛托内,不久被杀.希腊波斯战争(公元前 492— 前 449) 以后,雅典成为希腊民主政治与经济文化的中心,希腊数学也随之走向繁荣,学派林立,主要有:

伊利亚学派 以居住在意大利南部伊利亚(Eles) 地方的芝诺(Zeno,约公元前 490— 前 430) 为代表,芝诺是毕达哥拉斯学派成员巴门尼德(Parmenides,约公元前 515— 前 450) 的学生.较晚的德谟克里特(Democritus,约公元前 460— 前 370) **原子论学派**,则与伊利亚学派在思想上有一定继承关系.

诡辩学派 活跃于公元前 5 世纪下半叶的雅典城,主要代表人物有希比阿斯(Hippias,约生于公元前 460)、安提丰(Antiphon,约公元前 480— 前 411)、布里松(Bryson of Heraclea,公元前 450 左右) 等,均以雄辩著称.“诡辩”(Sophism) 希腊原词 σόφισμα 含智慧之意,故诡辩学派亦称“智人学派”.

雅典学院(柏拉图学派) 柏拉图(Plato,公元前 427— 前 347) 曾师从毕达哥拉斯学派的学者,约公元前 387 年在雅典创办学院,讲授哲学与数学,形成了自己的学派,主要成员有梅内赫莫斯(Menaechmus)、狄诺斯特拉图斯(Dinostratus)、蒂奥泰德(Theaetetus) 等.约公元前 368 年,著名数学家欧多克斯(Eudoxus,约公元前408— 前347)率徒加入雅典学院.**欧多克斯学派**的活动中心本来是在小亚细亚北部的齐基卡斯(Cyzicus),由此可见柏拉图学派的影响.事实上,雅典学院在柏拉图之后继续开办,直到 529 年东罗马君王查士丁尼下令关闭所有的希腊学校才告终止.

亚里士多德学派 亚里士多德(Aristotle,公元前 384— 前 322) 是柏拉图的学生,后长期共事.公元前 335 年建立自己的学派,因讲学于

雅典吕园,又称"吕园学派".亚里士多德的学生中有一位就是前面已提到的写过几何学史的欧多谟斯,欧多谟斯还撰有算术与天文学的历史.相传亚里士多德还做过亚历山大大帝的老师.

上述诸派多以哲学探讨为主,但他们的研究活动极大地加强了希腊数学的理论化色彩,主要表现在以下三个方面.

(一) 三大几何问题

古希腊三大著名几何问题是:

(1) 化圆为方,即作一个与给定的圆面积相等的正方形.

(2) 倍立方体,即求作一立方体,使其体积等于已知立方体的两倍.

(3) 三等分角,即分任意角为三等分.

三大问题的起源涉及到一些古老的传说.例如关于倍立方体问题,埃拉托塞尼(Eratosthenes,约公元前 276— 前 195) 曾记载了一位古希腊诗人讲述的故事,说神话中的米诺斯王(King Minos) 嫌别人为他建造的坟墓太小,命令将其扩大一倍,并说只要将每边扩大一倍就行,这当然是错误的.这类问题激发了整个古希腊时代许多数学家的研究兴趣,其中贡献最多的是诡辩学派.由于希腊人限制了作图工具只能使用圆规与(不带刻度的) 直尺,使这些问题变得难以解决并富有理论魅力.

最早研究化圆为方问题的是安纳萨哥拉斯(Anaxagoras, 约公元前 500— 前 428),但详情不得而知.公元前5世纪下半叶开奥斯的希波克拉底(Hippocrates of Chios) 解决了与化圆为方有关的化月牙形为方.如图2.4,设以 O 为圆心的大圆直径为 1, 则直角弧 $\overparen{AB}$ 所对的弦 AB 长为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$,以 AB 为直径的小圆的面积应为大圆面积的一半.特别地,以 AB 为直径的半圆

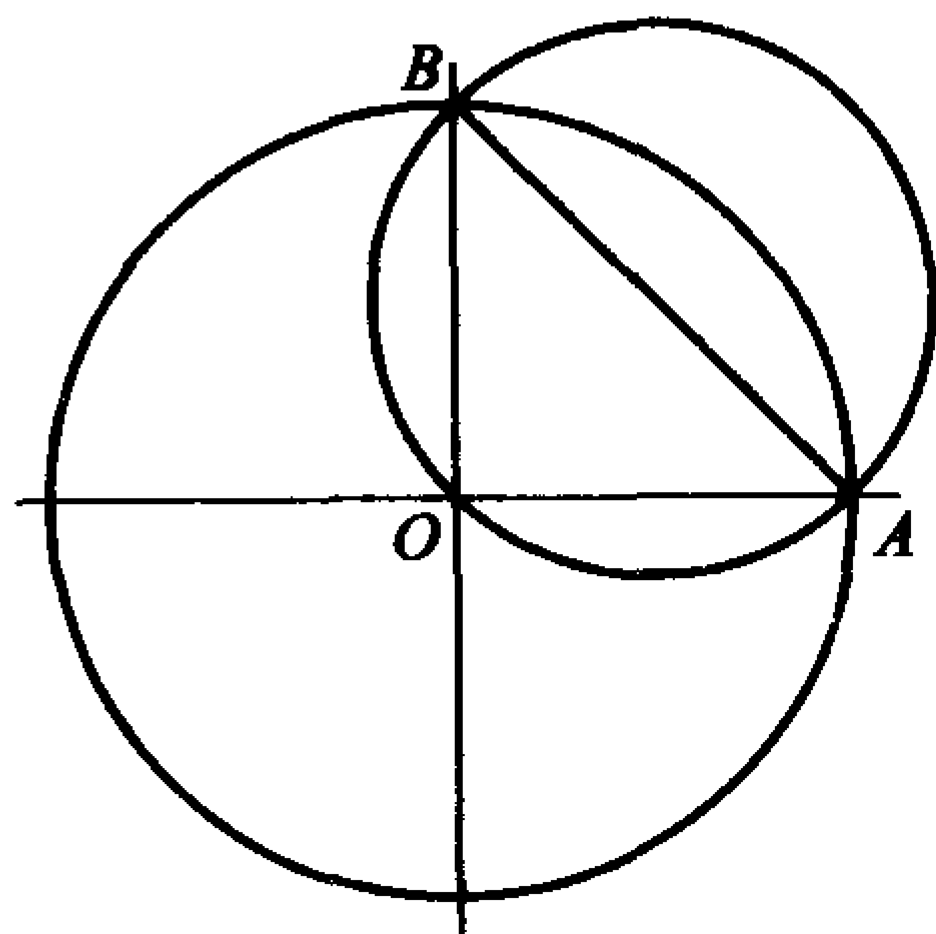


图 2.4

面积应等于 AO 与 BO 所夹四分之一大圆的面积. 由此可知:大圆之外、小圆之内的月牙形区域的面积等于 ΔAOB 的面积. 这说明由圆弧围成的区域的面积可以与一个正方形的面积相等. 这一结果朝解决化圆为方问题的方向迈进了一步. 希波克拉底证明了一系列特殊月牙形的化圆为方,但每次都利用了两个圆的相减,对于单个圆的化圆为方,最终并未能解决.

诡辩学派的代表人物安提丰(Antiphon,约公元前 480— 前 411),则首先提出了用圆内接正多边形逼近圆面积的方法来化圆为方. 他从一个圆内接正方形出发,将边数逐步加倍得到正八边形、正十六边形、……、无限重复这一过程,随着圆面积的逐渐"穷竭"(exhaustion),将得到一个边长极微小的圆内接正多边形. 安提丰认为这个内接正多边形将与圆重合,既然我们通常能够作出一个等于任何已知多边形的正方形,那么事实上我们就能作出等于一个圆的正方形. 这种推理当然没有真正解决化圆为方问题,但安提丰却因此成为古希腊"穷竭法"的始祖.

关于倍立方体问题,一个关键的进展是希波克拉底对这一问题的"简化". 事实上希波克拉底指出了倍立方体问题可以化为求一线段与它的二倍长线段之间的双重比例中项问题:

$$a : x = x : y = y : 2a$$

这样求出的 x 必满足 $x^3 = 2a^3$,即为倍立方体问题的解. 希波克拉底并没有能从几何上作出这样的比例中项线段. 比他稍晚的一些希腊数学家则借助某些特殊曲线作出了可作为倍立方体问题解的比例中项线段,其中最重大的成就是柏拉图学派的梅内赫莫斯(Menaechmus,约公元前 360)为解决倍立方体问题而发现了圆锥曲线. 事实上,前述的比例中项关系等价于方程

$$x^2 = ay, \quad y^2 = 2ax, \quad xy = 2a^2.$$

因此量 x, y 应为两条抛物线的交点或一条抛物线与一条双曲线的交点之坐标. 梅内赫莫斯并没有抛物线、双曲线的名称,更不知道坐标概念,但他确实使用了圆锥曲线的交点来解决倍立方问题,他引进圆锥曲线的办法是:用垂直于圆锥锥面 —— 母线的平面与锥面相截,当圆锥

顶角为直角、锐角与钝角时，就分别得到后来所称的抛物线、椭圆和双曲线(如图 2.5).

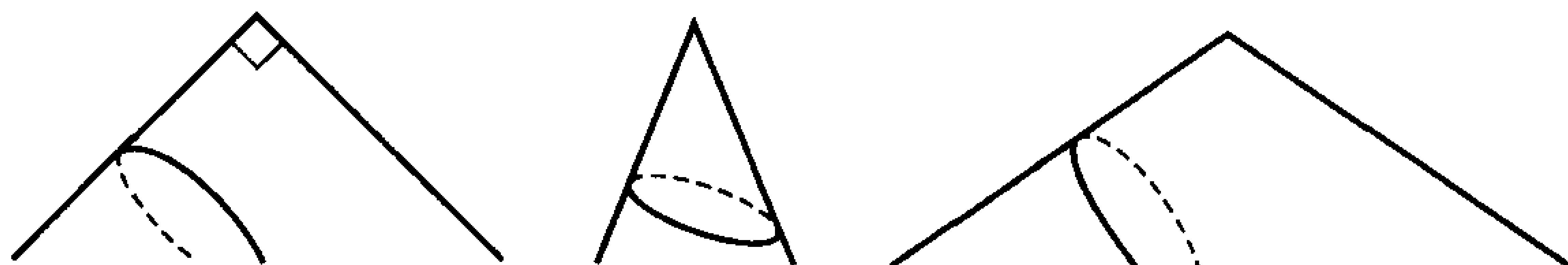


图 2.5

希腊人还利用其他多种曲线来求解三大作图问题，例如，据说诡辩学派的希比阿斯为了三等分任意角而发明了“割圆曲线”(quadratrix). 如图 2.6，在正方形 $ABCD$ 中，令 AB 平行于自身匀速下降直至与 DC 重合，与此同时 DA 顺时针匀速转动直至与 DC 重合. 若用 $A'B'$ 和 DA'' 分别表示这两条移动线段在任一时刻的位置，则它们的交点 P 产生的曲线就是割圆曲线. 如果这曲线能够作出，那么三等分一个角就很容易做到. 例如若 PDC 是需要三等分的角. 将 $B'C$ 和 $A'D$ 三等分，分点为 R, S, T, U. 设 TR 和 US 分别交割圆曲线于 V 和 W，则根据该曲线的性质，线段 DV, DW 就将角 PDC 分成三个相等的部分. 割圆曲线也可以用来化圆为方.

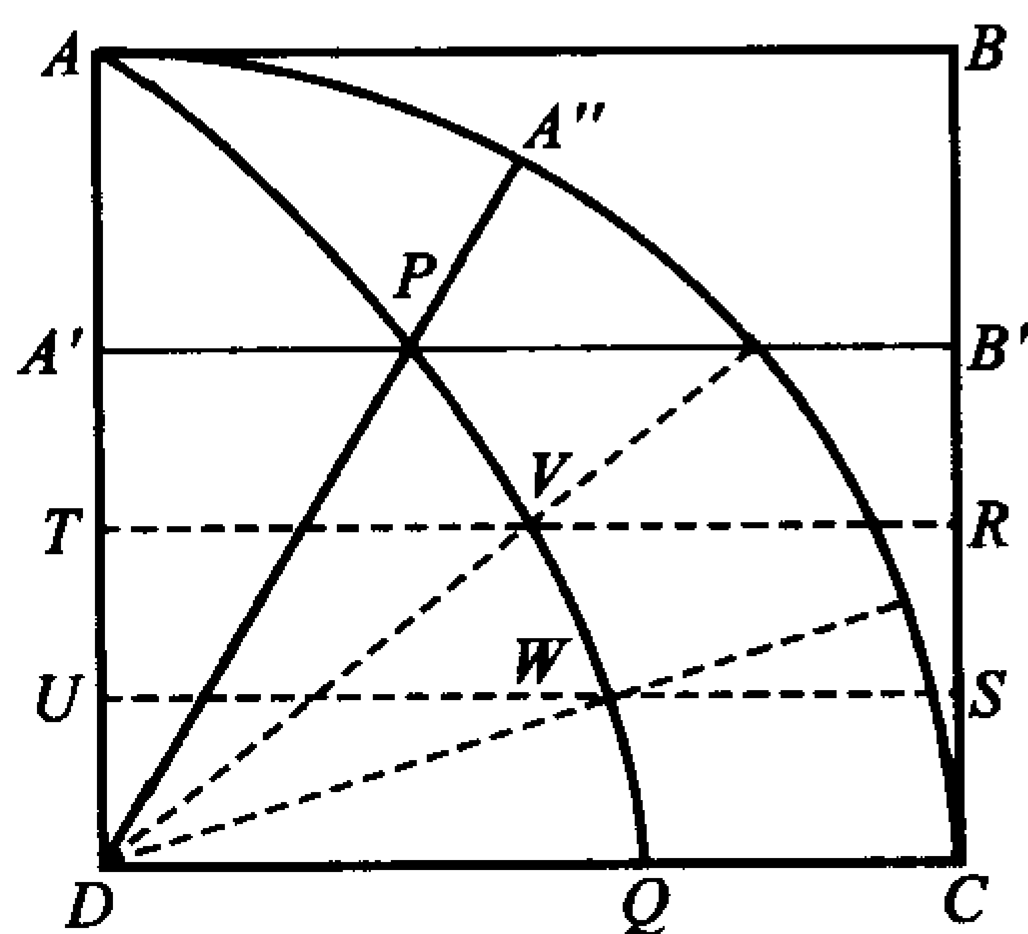


图 2.6

希腊人对三大作图问题的所有解答都无法严格遵守尺规作图的限制. 直到 19 世纪，数学家们才利用现代数学知识弄清了这三大问题实际上是不可解的. 1837 年法国数学家旺泽尔(P. L. Wantzel) 首先在代

数方程论基础上证明了倍立方和三等分任意角不可能只用尺规作图；1882 年德国数学家林德曼(C. L. F. Lindemann，1852—1939) 证明了数 π 的超越性，从而确立了尺规化圆为方的不可能性. 不过，如我们已经看到的那样，希腊人虽然没有能解决三大作图问题，但他们的探讨引出了许多重要发现，对整个希腊数学产生了巨大影响.

(二) 无限性概念的早期探索

希腊人在理性数学活动的早期，已经接触到了无限性、连续性等深刻的概念，对这些概念的着意探讨，也是雅典时期希腊数学的特征之一. 这方面最有代表性的人物是伊利亚学派的芝诺. 芝诺提出了四个著名的悖论，将无限性概念所遭遇的困难揭示无遗，根据亚里士多德《物理学》记载，这四个悖论如下.

(1) 两分法：运动不存在，因为位移事物在达到目的地之前必先抵达一半处；在抵达一半处之前又必先抵达四分之一处，……，依此类推可至无穷.

(2) 阿基里斯：阿基里斯(Achilles)① 永远追不上一只乌龟，因为若乌龟的起跑点领先一段距离，阿基里斯必须首先跑到乌龟的出发点，而在这段时间里乌龟又向前爬过一段距离，如此直至无穷.

(3) 飞箭：飞着的箭是静止的，因为任何事物当它是在一个和自己大小相同的空间里时，它是静止的，而飞箭在飞行过程中的每一“瞬间”都是如此.

(4) 运动场：空间和时间不能由不可分割的单元组成. 假设不然，运动场跑道上三排队列 A，B，C，令 C 往右移动，A 往左移动，其速度相对于 B 而言都是每瞬间移动一个点. 这样一来，A 上的点就在每瞬间离开 C 两个点的距离，因而必存在一更小的时间单元.

芝诺悖论的前两个，是针对事物无限可分的观点，而后两个则矛头直指不可分无限小量的思想. 要澄清这些悖论需要极限、连续及无穷集合等抽象概念，当时的希腊数学家尚不可能给予清晰的解答. 但芝诺悖

① 希腊名将，善跑，见荷马史诗《依里亚特》.

论与不可公度的困难一起，成为希腊数学追求逻辑精确性的强力激素.

希腊人对无限性问题探讨影响后世较深的另一学派是原子论学派，其代表人物德谟克里特曾师从琉西普斯(Leucippus)，后者是芝诺的学生，因而人们常常将德谟克里特归入伊利亚学派，虽然芝诺的辩证并不支持原子论学说.德谟克里特的原子论认为一切整体都由离散的单元组成，并运用这一思想于数学发现.例如他将圆锥看作是一系列不可分的薄层迭成，从而证明其体积等于同底同高的圆柱体积的三分之一.德谟克里特的方法可以说是不可分量理论的先驱.

(三) 逻辑演绎结构的倡导

雅典时期，数学中的演绎化倾向有了实质性的进展，这主要应归功于柏拉图、亚里士多德和他们的学派.



图 2.7　柏拉图与亚里士多德

(拉斐尔名画《雅典学派》局部)

柏拉图出身贵族名门，以万贯家财开设雅典学院.学院虽以哲学研究为主，但柏拉图认为数学是一切学问的基础，据说柏拉图学院的大门

上写着“不懂几何者莫入”.柏拉图本人虽未得到很多具体的数学成就,但对数学研究的方法却颇多贡献.普洛克鲁斯将分析法与归谬法归功于柏拉图.柏拉图给出了许多几何定义,并坚持对数学知识作演绎整理,这在他的代表著作《理想国》中有明白的陈述,柏拉图说:

“你们知道几何、算术和有关科学的学生,在他们的各科分支里,假定奇数和偶数、图形以及三种类型的角等等是已知的;这些是他们的假设,是大家认为他们以及所有人都知道的事,因而认为是无需向他们自己或向别人再作任何交代的;但他们是从这些事实出发的,并以前后一贯的方式往下推,直到得出结论”.

柏拉图的这些思想在他的学生与同事亚里士多德那里得到了极大的发展和完善.亚里士多德对定义作了更精密的讨论,并指出需要有未加定义的名词.他也深入研究了作为数学推理的出发点的基本原理,并将它们区分为公理和公设(他认为公理是一切科学公有的真理,而公设则是为某一门科学所接受的第一性原理).亚里士多德最重大的贡献是将前人使用的数学推理规律规范化和系统化,从而创立了独立的逻辑学,其中的基本逻辑原理矛盾律(一个命题不能同时是真的又是假的)和排中律(一个命题或是真的,或是假的,二者必居其一),成为数学中间接证明的核心.亚里士多德的形式逻辑被后人奉为演绎推理的圣经,在当时,则为欧几里得演绎几何体系的形成奠定了方法论的基础.

2.2 黄金时代——亚历山大学派

从公元前338年希腊诸邦被马其顿控制,至公元前30年罗马消灭最后一个希腊化国家托勒密王国的三百余年,史称希腊数学的“黄金时代”.这一时期希腊数学的中心从雅典转移到了亚历山大城.亚历山大城是马其顿帝国君主亚历山大大帝征服埃及后在地中海之滨建立的城市.亚历山大去世后,帝国一分为三.托勒密统治下的希腊埃及,定都亚历山大城,并于公元前300年左右,开始兴建规模宏大的亚历山大艺术宫(或译博物馆)和图书馆,提倡学术,罗致人才,使亚历山大成为希腊文化的首府,那里学者云集,先后出现了欧几里得、阿基米德和阿波罗

尼奥斯三大数学家,他们的成就标志了古典希腊数学的巅峰.

2.2.1 欧几里得与几何《原本》

欧几里得(Euclid of Alexandria)是希腊论证几何学的集大成者.关于他的生平我们所知甚少.根据有限的记载推断,欧几里得早年就学于雅典,公元前 300 年左右应托勒密一世之邀到亚历山大,成为亚历山大学派的奠基人.据传托勒密王曾问欧几里得有无学习几何的捷径?欧几里得回答说:"几何学无王者之道".另一则轶事说,有一次一个学生刚学了第一个几何命题便问"学了这些我能获得什么呢?"欧几里得叫来一个仆人吩咐说:"给这位先生三个分币,因为他一心想从学过的东西中捞点什么".欧几里得写过不少数学、天文、光学和音乐方面的著作,现存的有《原本》(Elements)、《数据》(Data)、《论剖分》(On Divisions)、《现象》(Phaenomena)、《光学》(Optics)和《镜面反射》(Catoptrica)等,还有一些仅知其名而内容失传的著作如《圆锥曲线》(Conics)、《衍论》(Porisms)、《曲面轨迹》(Surface Loci)、《辩伪术》(Pseudaria)等.在所有这些著作中,最重要的莫过于《原本》了.

"原本"的希腊文 *Στοῖχετα*,原意是指一学科中具有广泛应用的最重要的定理.欧几里得在这本原著中用公理法对当时的数学知识作了系统化、理论化的总结.全书共分 13 卷,包括有 5 条公理、5 条公设、119 个定义和 465 条命题,构成了历史上第一个数学公理体系.以下简要介绍《原本》的内容.

第 I 卷作为全书之首,给出了一些最基本的定义,如"点是没有部分的";"线是没有宽度的长";"面是只有长度和宽度的";"圆是由一条曲线包围的平面图形,从其内一点出发落在曲线上,所有线段彼此相等";……;等等.接着便列出了 5 条公设和 5 条公理[①],它们是:

公设

1 假定从任意一点到任意一点可作一直线.

---

① 欧几里得在这里采用了亚里士多德对公理和公设的区分.

2 一条有限直线可不断延长.

3 以任意中心和直径可以画圆.

4 凡直角都彼此相等.

5 若一直线落在两直线上所构成的同旁内角和小于两直角,那么把两直线无限延长,它们将在同旁内角和小于两直角的一侧相交.

公理

1 等于同量的量彼此相等.

2 等量加等量,和相等.

3 等量减等量,差相等.

4 彼此重合的图形是全等的.

5 整体大于部分.

欧几里得以这些基本定义、公设和公理作为全书推理的出发点.

第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ及Ⅵ卷包含了平面几何的一些基本内容,如全等形、平行线、多边形、圆、毕达哥拉斯定理、初等作图及相似形等.毕达哥拉斯定理(卷Ⅰ命题47)的证明是用面积来做的,如图2.8所示(首先证明 $\Delta ABD \cong \Delta FBC$,推得矩形 BL = 正方形 GB.同理推得矩形 CL = 正方形 AK).

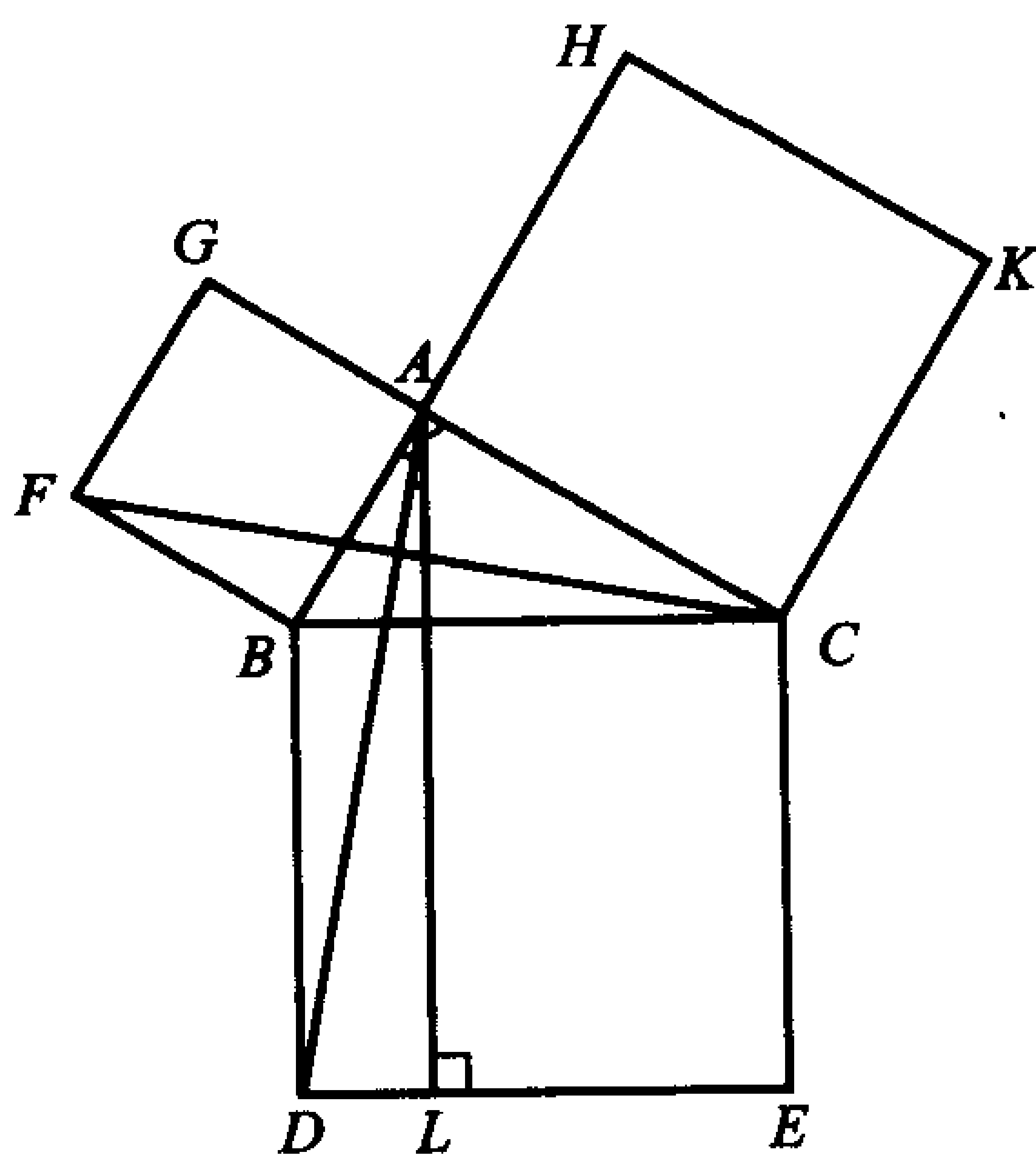


图2.8

第Ⅱ、Ⅵ卷中涉及所谓“几何代数”的内容,即以几何形式处理的

代数问题. 例如第 Ⅱ 卷命题 4:若把一线在任意一点割开,则在整个线上的正方形等于两段上的正方形加上以两段为边的矩形(图 2.9). 这相当于代数关系式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

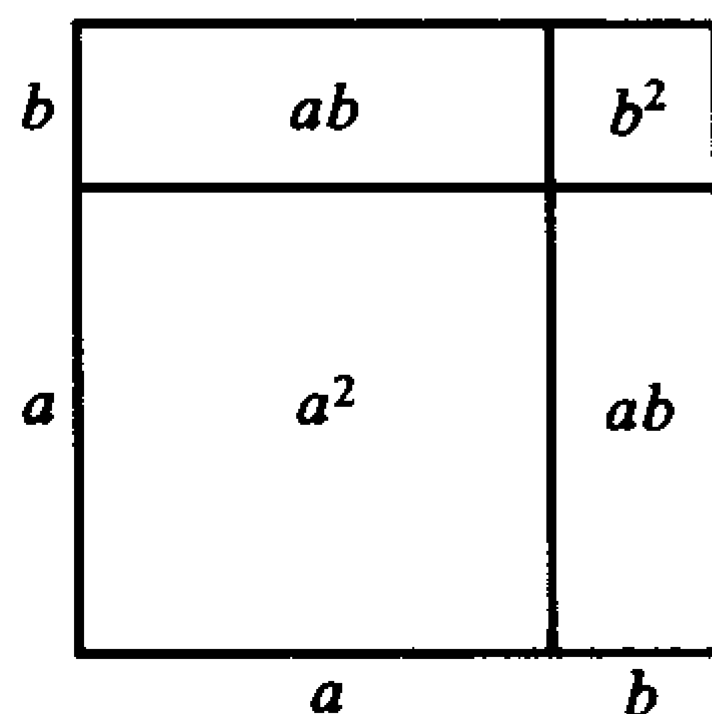


图 2.9

第 Ⅴ 卷讲比例论,是以欧多克斯的工作为基础的. 有人认为这一卷代表了《原本》的最大成就,因为它在当时的认识水平上消除了由不可公度量引起的数学危机.

《原本》第 Ⅴ 卷中给出比例的定义相当于(原文是用文字叙述的)说:

设 A, B, C, D 是任意四个量,其中 A 和 B 同类(即均为线段、角或面积等), C 和 D 同类. 如果对于任何两个正整数 m 和 n,关系 $mA \gtreqless nB$ 是否成立,相应地取决于关系 $mC \gtreqless nD$ 是否成立,则称 A 与 B 之比等于 C 与 D 之比,即 A, B, C, D 四量成比例.

这一定义并未限制涉及的量是可公度的还是不可公度的,因此可以运用它来证明许多早期毕达哥拉斯学派只对可公度量证明了的命题. 举一个例子:

定理　如果两个三角形的高相同,则它们的面积之比等于两底之比.

毕达哥拉斯学派的证明:如图 2.10(i),考虑两个三角形 ABC 和 ADE,它们的底(BC 和 DE)处于同一直线 MN 上. 设 BC 和 DE 分别包含一个公度单位的 p 倍和 q 倍,在 BC 和 DE 上画出这些分点,并与顶点 A 连接. ΔABC 和 ΔADE 分别被划分成 p 和 q 个小三角形,它们等底等

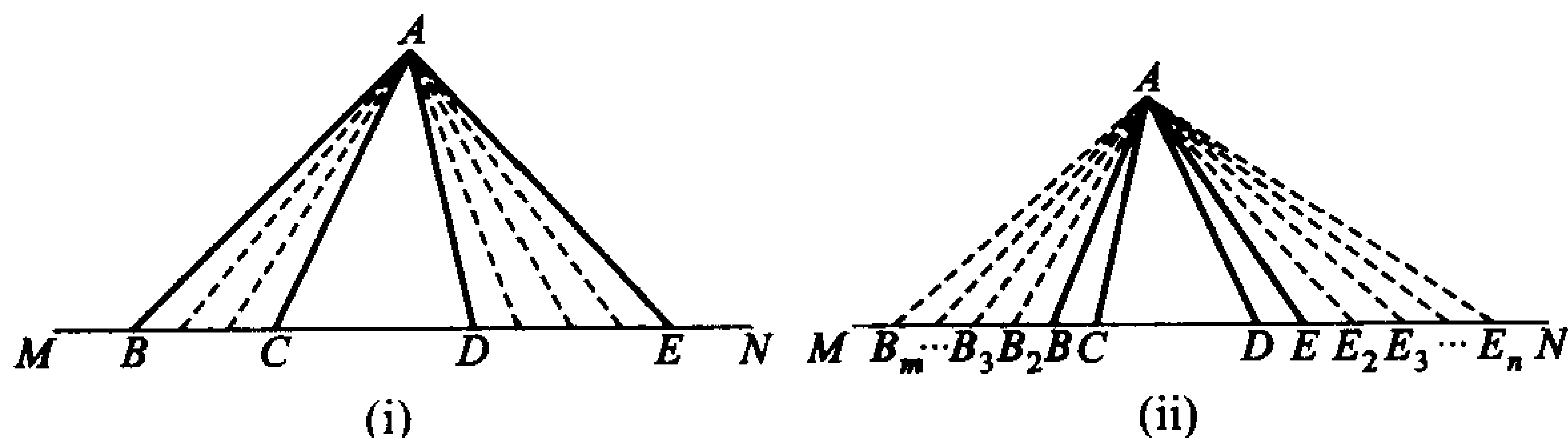


图 2.10

高,因此根据已知结果,它们面积相等.由此得

$$\Delta ABC : \Delta ADE = p : q = BC : DE.$$

但由于不可公度量的发现,上述证明以及许多其他定理的证明都不再适用.

欧几里得《原本》中的证明(欧多克斯):如图 2.10(ii),在 CB 延长线上从点 B 起相继截取 $m-1$ 个与 CB 相等的线段,分别将分点 $B_2, B_3, \cdots, B_m$ 与顶点 A 连接.同样在 DE 延长线上从 E 点起相继截取 $n-1$ 个与 DE 相等的线段,把分点 $E_2, E_3, \cdots, E_n$ 与顶点 A 连接.这时有:

$$B_mC = m(BC), \Delta AB_mC = m(\Delta ABC);$$

$$DE_n = n(DE), \Delta ADE_n = n(\Delta ADE).$$

根据已证明的结果,可知 $\Delta AB_mC \gtreqless \Delta AE_nD$ 取决于 $B_mC \gtreqless E_nD$,也就是说 $m(\Delta ABC) \gtreqless n(\Delta ADE)$ 取决于 $m(BC) \gtreqless n(DE)$.因此根据欧多克斯比例定义,有

$$\Delta ABC : \Delta ADE = BC : DE.$$

由此我们看到,《原本》第 V 卷是将比例理论由可公度量推广到不可公度量,使它能适用于更广泛的几何命题证明,从而巧妙地回避了无理量引起的麻烦.同《原本》的其他部分相比,第 5 卷的内容颇引人争议.问题的根本解决,要到 19 世纪,当人们借助极限过程对无理数作出严格定义之后.

第 Ⅶ,Ⅷ,Ⅸ 卷是关于数论的内容,其中陈述了求两数最大公因子的辗转相除法,即著名的欧几里得算法.这几卷给出了关于整数的一些定理及其证明,特别是素数分解的唯一性(即一数 a 分解为素数乘积的形式是唯一的)、素数个数无穷,等等.还有一个关于完全数的定理,相当于说:若 2^n-1 是素数,则 $(2^n-1)2^{n-1}$ 是完全数.这些内容说明,将《原本》看成是一部纯几何的著作是多少有些误解的.

第 X 卷讨论不可公度量,并试图进行分类.该卷篇幅最大,实际上欧几里得在这里仅涉及了可表为 $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ 的无理数.

最后的三卷(XI,XII,XIII) 主要是立体几何的内容,包括棱柱、棱锥、圆柱、圆锥和球等立体的体积定理以及对正多面体的讨论(在卷

XIII 中证明了正多面体只有五种). 卷 XII 中详细陈述了穷竭法. 穷竭法是古希腊数学家证明面积、体积定理时经常使用的一种得力方法. 如前面已经提到的,它是由安提丰首创,但完善、成熟的穷竭法主要归功于欧多克斯,也就是《原本》卷 XII 中所记载的方法. 由于穷竭法对于了解古希腊数学的典型意义,以下便以《原本》卷 XII 命题 2 为例来说明其基本精神.

命题 2 圆与圆之比等于其直径平方之比.

首先证明所谓"穷竭性",即圆可以被它的内接多边形所"穷竭","穷竭"的意义是二者的面积之差可小于任意给定的量. 如图 2.11,在圆里内接一正方形 $EZH\theta$,易知其面积等于圆外切正方形的一半,从而大于圆面积的一半. 设点 K,Λ,M,N 平分圆弧 $\widehat{EZ}$, $\widehat{ZH}$, $\widehat{H\theta}$, $\widehat{\theta E}$, 从而得到一圆内接正八边形. ΔEKZ 的面积大于它所在弓形的一半(考虑过 K 的切线与 ZE 形成的矩形),因此可知正八边形与正方形面积之差必大于圆与正方形面积之差的一半. 继续平分圆弧,连接线段,如此做下去,就可以得到边数加倍的一系列正多边形,每一步正 $2n$ 边形与 n 边形面积之差必大于圆与正 n 边形面积之差. 这样的正多边形系列就可以"穷竭"相应的圆,因为卷 XII 命题 1 已经证明了:给定两个不相等的量,如果从较大量中减去大于其半的量,再从余下的量中减去大于其半的量,总可得到比任意给定的量更小的量.

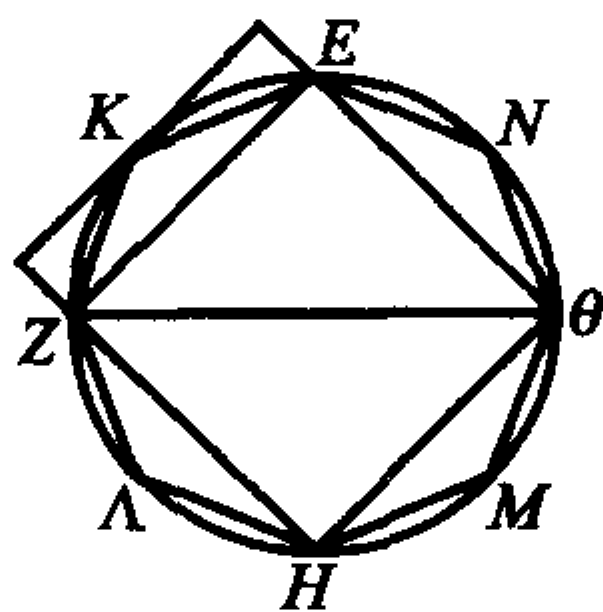


图 2.11

现在可以来证明命题 2 本身了. 设有两个圆 c 和 C,直径分别为 d 和 D,面积分别为 a 和 A. 欲证 $a/A = d^2/D^2$. 用间接证法,即否证 $a/A > d^2/D^2$ 和 $a/A < d^2/D^2$. 先假定 $a/A > d^2/D^2$,则必存在量 $a' < a$ 使 $a'/A = d^2/D^2$. 令 $a - a' = \varepsilon > 0$. 在 c 和 C 内分别内接边数相同的正多边形并设它们的面积分别为 p_n 和 P_n. 考虑正多边形的边与圆周之间的区域,若边数加倍,则由以上所证可知总有 p_n 使 $a - p_n < \varepsilon$, 从而 $p_n > a'$. 根据已经知道的结果 $p_n/P_n = d^2/D^2$ 并且由于已经假定 $a'/A = d^2/D^2$, 可以得出 $p_n/P_n = a'/A$. 由此,若 $p_n > a'$ 则必有 $P_n > A$,这是不可能的. 于是假设 $a/A > d^2/D^2$ 不能

成立.同理可以否证$a/A < d^2/D^2$,故必有 $a/A = d^2/D^2$.

欧几里得《原本》可以说是数学史上的第一座理论丰碑.它最大的功绩,是在于数学中演绎范式的确立,这种范式要求一门学科中的每个命题必须是在它之前已建立的一些命题的逻辑结论,而所有这样的推理链的共同出发点,是一些基本定义和被认为是不证自明的基本原理——公设或公理.这就是后来所谓的公理化思想.

与现代公理化方法相比,欧几里得《原本》存在着缺陷.例如某些定义仍借助直观或含糊不清(如直线被定义为"与其上的点相平齐的线",就很难说是令人满意的定义);虽然欧几里得对公设与公理作了精心的选择,但他的公理系统是不完备的,有些公理不独立(如"凡直角都相等").对其中有些问题,欧几里得同时代或稍后的古代学者已有所察觉,但整个欧几里得公理体系逻辑缺陷的深入考察与消除,需要等待19世纪和20世纪数学家的智慧.在公元前3世纪,《原本》中的公理体系,为人们提供了使知识条理化和严密化的强有力的手段,这使它成为西方科学的"圣经",同时也是整个科学史上流传最广的著作之一.除早期的希腊文、阿拉伯文和拉丁文抄本外,仅从1482年第一个拉丁文印刷本在威尼斯问世以来(图2.12),已用各种文字出了一千多版.不过,

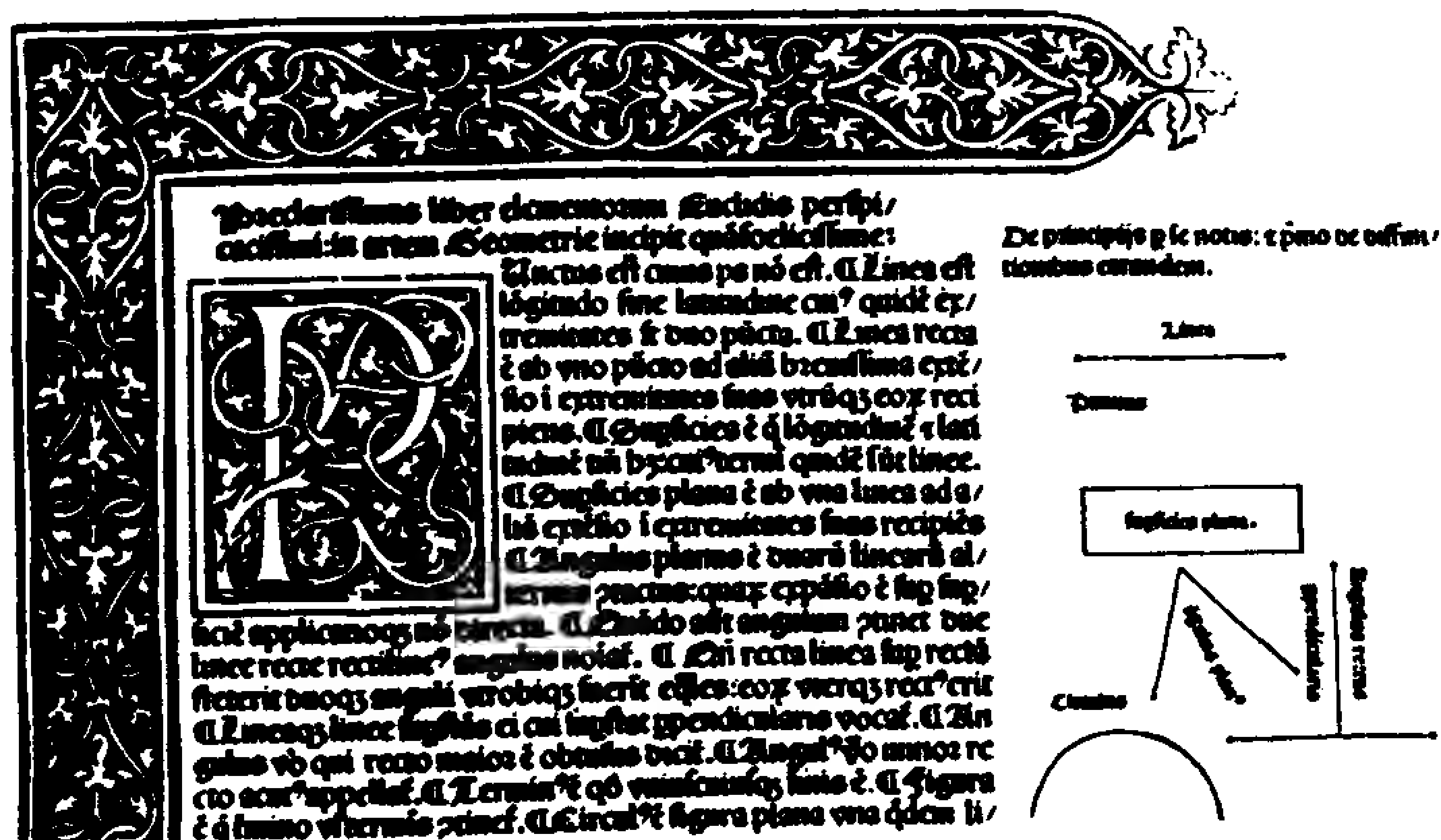


图 2.12

有一点需要指出的是:欧几里得《原本》原作已经失传,现在的各种版本都是根据后人的修订、注释重新整理出来的,《原本》的早期评注、修订者有海伦(Heron,约公元1世纪),波菲里(Porphyry,233—304)、帕波斯(Puppus,约300—350)、亚历山大城的塞翁(Theon of Alexandria,4世纪晚期)和普洛克鲁斯等,其中塞翁的修订本是后来传世的希腊文《原本》及各种译本的主要底本.而现存最早的拉丁文本则是根据中世纪阿拉伯文本返译的.1255年左右,意大利学者坎帕努斯(Campanus)综合参考了各种阿拉伯文本及早期拉丁文本重新译出的拉丁文本,后来正式出版,就是上面提到的第一个印刷本《原本》.

2.2.2 阿基米德的数学成就

阿基米德(Archimedes,公元前287— 前212)出生于西西里岛的叙拉古(Syracuse),早年曾在亚历山大城跟过欧几里得的门生学习,后来虽然离开了亚历山大,但仍与那里的师友保持着密切联系.他的许多成果都是通过与亚历山大学者的通信而保存下来.因此,阿基米德通常被看成是亚历山大学派的成员.

阿基米德著述极为丰富,但多以类似论文手稿而非大部巨著的形式出现.这些著述内容涉及数学、力学及天文学等,其中流传于世的有:

(1)《圆的度量》(Measurement of Circle);

(2)《抛物线求积》(Quadrature of the Parabola);

(3)《论螺线》(On Spirals);

(4)《论球和圆柱》(On the Sphere and Cylinder);

(5)《论劈锥曲面和旋转椭球》(On Conoids and Spheroids);

(6)《引理集》(Book of Lemmas);

(7)《处理力学问题的方法》(The Method Treating of Mechanical Problems);

(8)《论平面图形的平衡或其重心》(On the Equilibrium of Planes or the Centres of Gravity of Planes);

(9)《论浮体》(On Floating Bodies);

(10)《砂粒计数》(The Sand Reckoner);

(11)《牛群问题》(The Cattle Problem).

阿基米德的数学著作集中探讨与面积和体积计算相关的问题.在《圆的度量》中,阿基米德将穷竭法应用于圆的周长和面积公式.他从圆内接正三角形出发,边数逐次加倍,计算到正96边形而得到圆周率π的近似$\frac{22}{7}$.在《论球和圆柱》中,阿基米德运用穷竭法证明了与球的面积和体积有关的公式,他证明的命题包括:任一球面积等于其大圆面积的四倍;以球的大圆为底,以球直径为高的圆柱,其体积是球体积的$\frac{3}{2}$,其包括上、下底在内的表面积是球面积的$\frac{3}{2}$;等等.

我们知道,穷竭法可以严格证明已知的命题,却不能用来发现新的结果.这是希腊演绎数学的一大弱点.阿基米德在这方面则属例外,他的数学工作是严格证明与创造技巧相结合的典范,这在其《处理力学问题的方法》(简称《方法》)中有充分的体现.《方法》实际上是阿基米德写给另一位数学家埃拉托塞尼的一封信[①],其中包括有15个命题,集中阐释了发现求积公式的方法,这种通常被称为"平衡法"的方法,实质上是一种原始的积分法.以下我们先以命题2关于球体积公式的推导来说明阿基米德方法的基本精神.

设R为一个球的半径,把这个球的两极沿水平线放置,使北极N与原点重合(图2.13).画出$2R\times R$的矩形$NABS$和ΔNCS绕x轴旋转而得到的圆柱和圆锥.现在从这三个主体中割出与N距离为x、厚度为Δx的三个竖直薄片(假设它们都是扁平圆柱),这些薄片的体积分别近似于:

球:　$\pi x(2R-x)\Delta x$(设球片半径r,则有

$$r^2=R^2-(x-R)^2=2xR-x^2=x(2R-x)).$$

圆柱:$\pi R^2\Delta x$.

① 该信长期失传,1906年才被丹麦学者海伯格(J.L.Heiberg)重新发现.

圆锥：$\pi x^2\Delta x$.

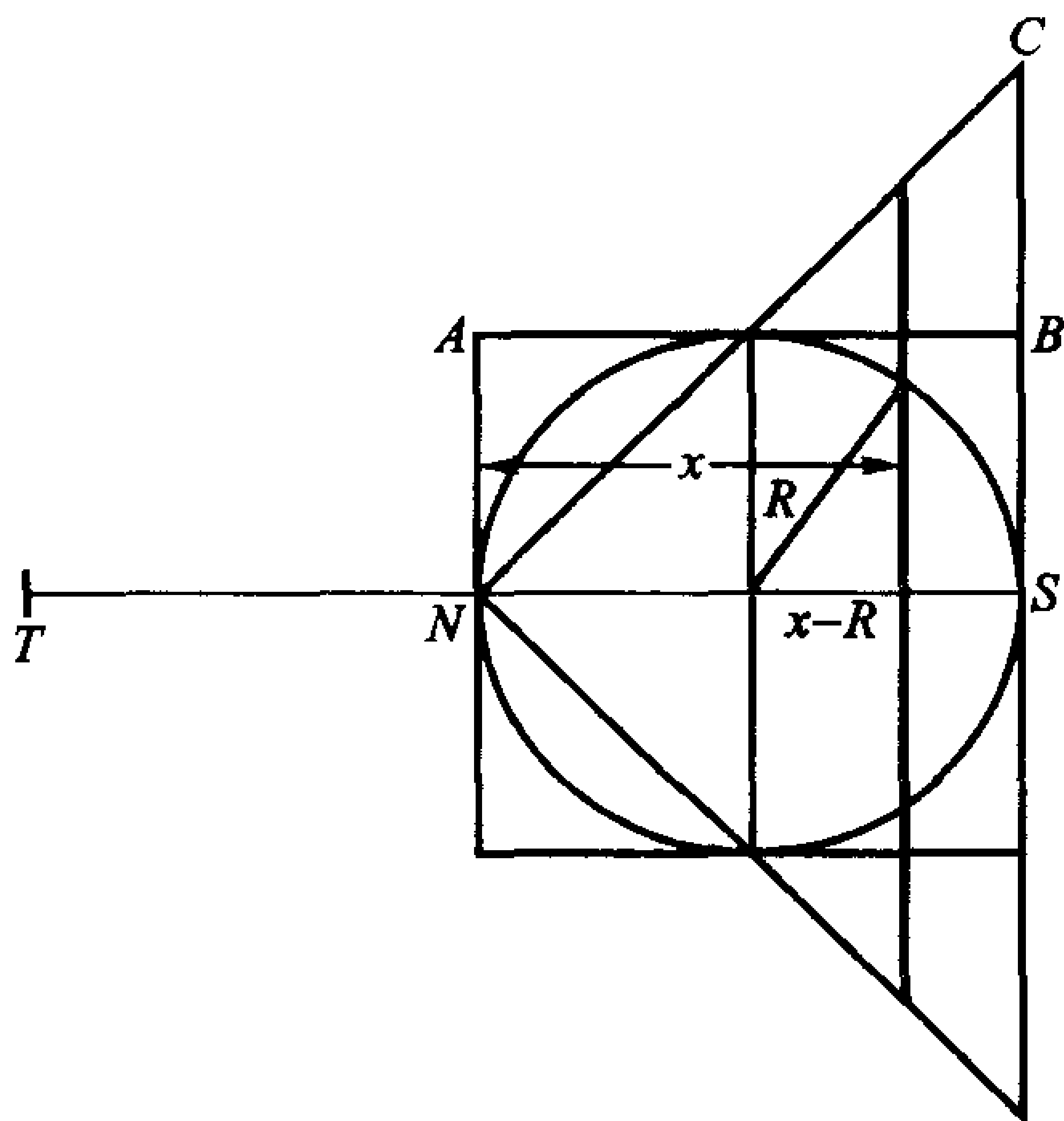


图 2.13

取由球和圆锥割出的两个薄片，将它们的重心吊在点 T，使 $TN = 2R$. 这两个薄片绕 N 的合成力矩为

$$[\pi x(2R - x)\Delta x + \pi x^2\Delta x]\, 2R = 4\pi R^2 x\Delta x\ .$$

容易看出这等于圆柱割出的薄片处于原来位置时绕 N 的力矩的 4 倍. 把所有这些薄片绕 N 的力矩加在一起便得到

$$2R(\text{球体积} + \text{圆锥体积}) = 4R\ \text{圆柱体积},$$

$$2R\left(\text{球体积} + \frac{8\pi R^3}{3}\right) = 8\pi R^4,$$

故得：

$$\text{球体积} = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

等于其外切圆柱体积的 $\frac{2}{3}$，这就是阿基米德在《论球和圆柱》中用穷竭法证明的结果.

由上述例子可见，阿基米德的“平衡法”，在数学上就是将需要求积的量(面积、体积等)分成许多微小单元(如微小线段、薄片等)，再用另

一组微小单元来进行比较，而后一组微小单元的总和比较容易计算. 只不过这两组微小单元的比较是借助于力学上的杠杆平衡原理来实现的. 因此，平衡法体现了近代积分法的基本思想，可以说是阿基米德数学研究的最大功绩. 阿基米德本人用它解决了一系列几何图形的面积、体积计算问题.

当然，平衡法本身必须以极限论为基础，阿基米德意识到他的方法在严密性上的不足，所以当他用平衡法求出一个面积或体积之后，必再用穷竭法给以严格的证明. 这种发现与求证的双重方法，是阿基米德独特的思维模式，也可以说是他胜欧几里得一筹之处. 这方面另一个典型的例子是抛物线弓形的求积.

如图 2.14，ABC 是直线 AC 和抛物线弧 $\widehat{ABC}$ 所围的任一弓形. 设 CE 是抛物线在 C 处的切线，D 是 CA 的中点；又设 DBE 是过 D 且平行于抛物线轴的直线. 于是 $DB = BE$，这是欧几里得《圆锥曲线》中的一个结果，为阿基米德已知. 阿基米德《方法》命题1用平衡法求出了抛物线弓形 ABC 的面积是三角形 ABC 面积的 $\frac{4}{3}$. 他的做法与球体积的推算本质类同，但现在阿基米德是将抛物线弓形与三角形 CFA 的面积进行比较（如图 $AF // OM // DE$，$HK = CK$）. 设 W 是 ΔCFA 的重心，阿基米德证明它必为 CK 上的点且有 $KW = \frac{1}{3}CK$. 利用杠杆原理和重

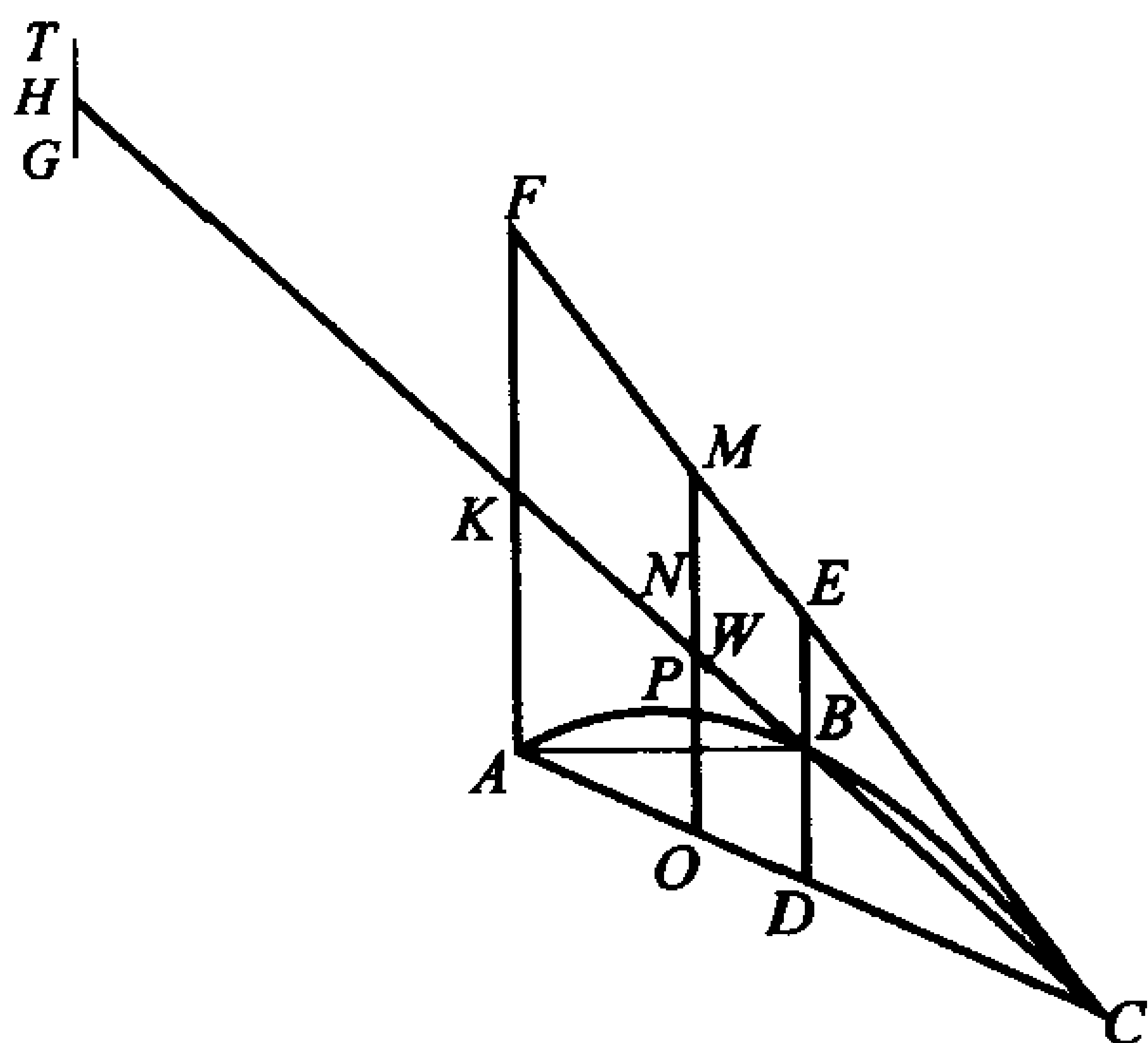


图 2.14

心定理他最后得到

$$\frac{\Delta CFA}{\text{抛物弓形}\,CBA}=\frac{HK}{KW}=\frac{3}{1}.$$

同时由三角形之间的面积关系易知

$$\Delta CFA = 4\Delta ABC.$$

这样就得到抛物线弓形 CBA 与三角形 ABC 的面积之比是 4 : 3.

阿基米德在获得上述结果后,又用穷竭法加以证明,证明过程详载于《抛物线求积》一文中,下面是阿基米德证明的基本思路.

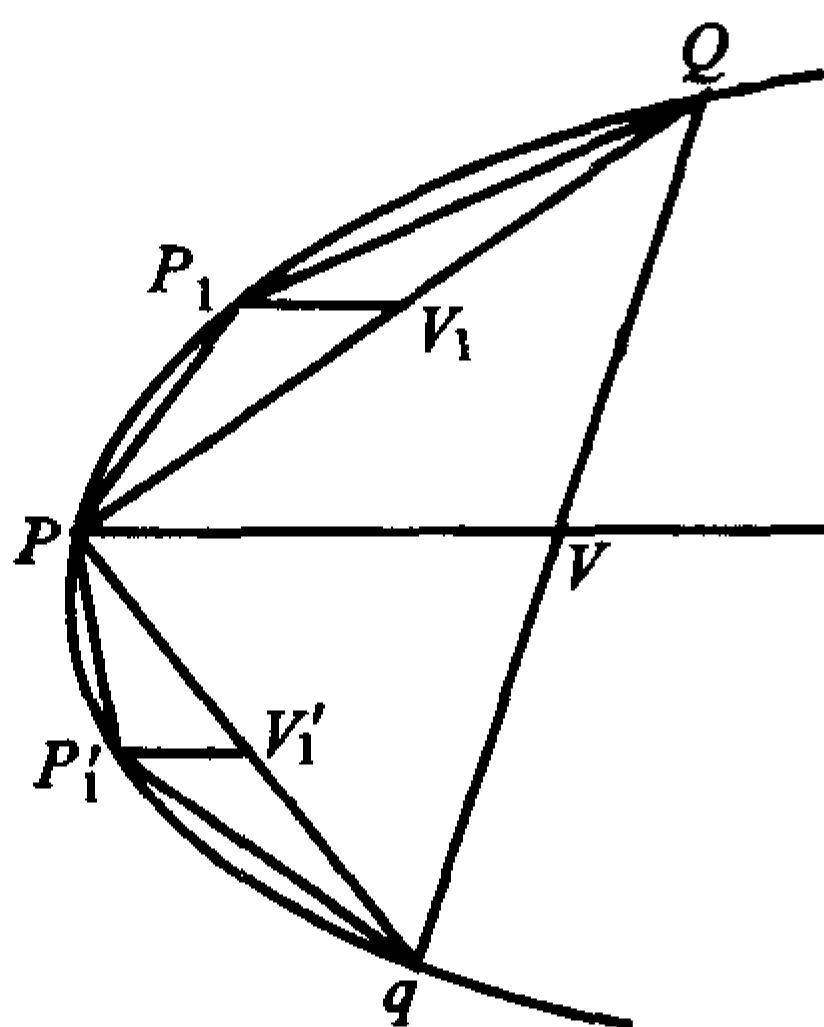


图 2.15

如图 2.15,抛物线弓形 PQq,阿基米德首先证明它可以被一系列三角形"穷竭".取底弦 Qq 之中点 V,PV 为平行于抛物线轴的直线.易知 ΔPQq 面积大于抛物线弓形 PQq 的一半.在弦 PQ 和 Pq 上作类似的分割,同样有:ΔPP_1Q 面积大于抛物线弓形 PP_1Q 的一半;$\Delta PP_1'q$ 面积大于抛物线弓形 PP'_1q 的一半.阿基米德同时利用已知几何命题证明了

$$\Delta PP_1Q + \Delta PP_1'q = \frac{1}{4}\Delta PQq.$$

继续这一过程,对其后的三角形,也有同样的面积关系.因此,抛物线弓形 PQq 的面积可以用所有这些内接三角形的面积和来"穷竭",也就是说可以用几何级数 $S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{4^2}S+\cdots$ 的有限项之和来逼近(这里以 S 记 ΔPQq 的面积).

然后阿基米德用间接证法来完成他的穷竭法证明. 首先他指出对于公比为$\frac{1}{4}$的几何数列前 n 项有$A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \frac{1}{3}A_n = \frac{4}{3}A_1$. 在本例中 $A_1 = S$;然后他证明抛物线弓形的面积 A 不能大于$\frac{4}{3}S$. 假设其否,即 $A > \frac{4}{3}S$,那就可以得到一组三角形使其面积和 S' 与弓形面积A 之差小于任意给定量,从而可以大于$\frac{4}{3}S$,即有 $A > S' > \frac{4}{3}S$,但若设 S' 有 m 项,则据前面所证又有 $S' + \frac{1}{3}A_m = \frac{4}{3}S$,从而 $S' < \frac{4}{3}S$,得出矛盾. 同理可证 A 不能小于$\frac{4}{3}S$.

与欧几里得相比,阿基米德可以说是一位应用数学家. 关于阿基米德的许多有趣轶事都与数学的应用有关. 例如根据帕波斯记载,阿基米德曾宣称:“给我一个支点,我就可以移动地球!”而传说阿基米德为了让人相信自己的断言,曾设计了一组复杂的滑车装置,使叙拉古国王希罗(Hiero)亲手移动了一只巨大的三桅货船. 阿基米德有两本著作是关于应用数学的,即《论平面图形的平衡或其重心》和《论浮体》. 前者讨论物体的平衡以及重心的确定,其中给出了著名的杠杆原理.《论浮体》则是一部流体静力学著述,其中提出了许多流体静力学定律,特别是著名的“阿基米德原理”(物体在流体中所受浮力等于其排去流体的重量),与此联系着一则后来变得家喻户晓的故事:国王希罗为自己定做了一顶金皇冠. 皇冠做好后,他怀疑其中掺了银子,便请阿基米德设法判断. 阿基米德久思不解. 有一次洗澡时,注意到身体将水排出盆外并觉体重减轻,顿受启发,立即光身冲出浴室,沿街奔呼“Eureka!”(找到啦!). 他就这样发现了浮力定律并用它来解决了皇冠难题.

阿基米德在第二次布匿战争中被罗马士兵杀害,终年 75 岁. 史载阿基米德在保卫叙拉古的战斗中发明的许多军械诸如投石炮、火镜等,曾使敌军闻风丧胆. 后来叙拉古不幸被罗马军队攻陷,当破城而入的罗马士兵冲到阿基米德身边时,这位老人正在出神思考数学问题,他让士兵别碰沙盘上的几何图形,被激怒的罗马士兵将他刺死. 据说曾下令勿



图 2.16　阿基米德之死(仿古镶嵌画)

杀阿基米德的罗马主将马塞吕斯事后特意为阿基米德建墓,并按阿基米德的遗愿将死者最引以自豪的数学发现的象征图形 —— 球及其外切圆柱刻在了墓碑上.

2.2.3　阿波罗尼奥斯与圆锥曲线论

亚历山大时期第三位重要的数学家阿波罗尼奥斯(Apollonius of Perga,约公元前 262— 前 190),出生于小亚细亚的珀尔加.有关他的生平的主要信息来源是其传世之作《圆锥曲线论》(Conics) 各卷中作为前言的信件.阿波罗尼奥斯年轻时曾在亚历山大城跟随欧几里得的门生学习,后到小亚细亚西岸的帕加蒙(Pergamum) 王国居住与工作,但晚年又回到亚历山大,并卒于该城.

阿波罗尼奥斯的贡献涉及几何学和天文学,但他最重要的数学成就是在前人工作的基础上创立了相当完美的圆锥曲线理论.《圆锥曲线论》就是这方面的系统总结.这部以欧几里得严谨风格写成的巨著对圆锥曲线研究所达到的高度,直至 17 世纪笛卡儿、帕斯卡出场之前,始终无人能够超越.

《圆锥曲线论》全书共八卷,含 487 个命题.前四卷是基础部分,后

四卷为拓广的内容,其中第 8 卷已失传.这里重点介绍卷 1 圆锥曲线的引入,从中可以领略阿波罗尼奥斯的基本思想.

在阿波罗尼奥斯之前,希腊人用三种不同圆锥面导出圆锥曲线(见 2.1).阿波罗尼奥斯则第一次从一个对顶(直圆或斜圆)锥得到所有的圆锥曲线,并给它们以正式的命名,现在通用的椭圆(elipse)、双曲线(hyperbola)和抛物线(parabola)就是他提出的.

以椭圆的定义为例.设有定圆 BC 及其所在平面外一点 A.过 A 且沿圆周移动的一根直线生成一对顶锥面(不一定是正圆锥).现在用一平面与圆锥相截,设截面与底平面相交于直线 GF 且 GF 在底圆之外,又与圆锥面相交成曲线 EDL.在底圆上取直径 $BC \perp GF$,并延长使交 GF 于 G.轴三角形 ABC 与曲线 EDL 交于 E 和 D.EDG 便是轴三角形平面与截平面的交线.取截曲线上任一点 L,作 $ML /\!/ GF$,交 ED 于 M.阿波罗尼奥斯称 ML 为纵标线,他希望对曲线上任意点建立起纵标线 ML 与同样依赖于点 L 位置的线段 EM 之间的关系.为此,过 M 作 $PR /\!/ BC$,则 PR 与 ML 所确定的平面与底面平行,故与圆锥相交成一圆,且 PR 为直径,$ML \perp PR$.阿波罗尼奥斯还作了一些其他的辅助线(这里略去细节,参见图 2.17),然后利用熟知的平面几何定理最后推得:

$$ML^2 = \frac{BK \cdot CK}{AK^2} \cdot EM(ED - EM).$$

对于给定圆锥与截平面,ED,BK,CK 和 AK 均为确定的线段,因此上述式子实际上是 ML 与 EM 之间的一个关系式.

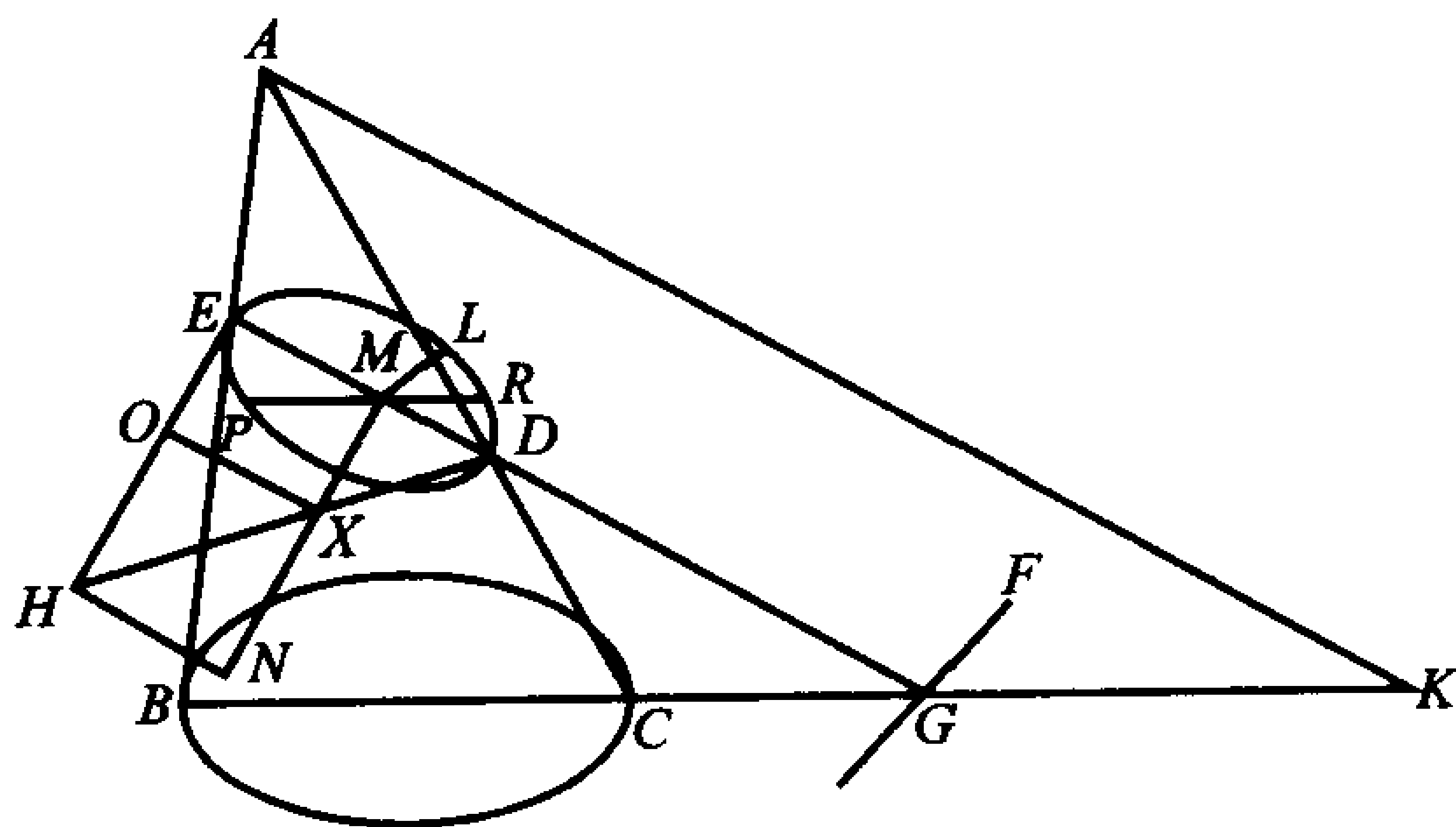


图 2.17

如果用现代坐标几何的语言来表述，取原点为 E，EDG 为横轴，过 E 且平行于 ML 的直线为纵轴，在这样建立起来的坐标系一般说是斜角坐标系(因为在斜圆锥情形，虽有 $ML \perp PR$，但 ML 一般不垂直于 ED). 在这一坐标系中，记 $ED = d$，$\frac{BK \cdot CK}{AK^2} = \frac{p}{d}$，$EM = x$，$ML = y$，则阿波罗尼奥斯得到的上述关系式就相当于解析几何中的椭圆方程

$$y^2 = px - \frac{p}{d}x^2.$$

阿波罗尼奥斯用类似的方法处理截平面与底圆相交的情形，当截平面不与任何母线平行(此时它必与圆锥面的两支都相交)时，他得到的关系式相当于今天的双曲线方程

$$y^2 = px + \frac{p}{d}x^2.$$

而当截平面平行于一条母线时，所得关系式则相当于今天的抛物线方程：

$$y^2 = px.$$

阿波罗尼奥斯分别称这三种曲线为"亏曲线"、"盈曲线"和"齐曲线"，这是他从毕达哥拉斯学派和欧几里得的面积贴合法中借来的用语. 例如欧几里得《原本》中常将一矩形"贴合"于一线段，意将矩形的底置于该线段上，使其底的一端与线段的一个端点重合. 依据贴合矩形的底短于、超过还是重合于该线段而区分出"亏"、"盈"和"齐"三种情形. 阿波罗尼奥斯在定义圆锥曲线时进行了这样的讨论：在截平面上过 E 点作 $EH \perp EG$ 且使 $EH = p$，联结 HD，作 $MN // EH$ 且与 EH 等长，设 MN 交 HD 于 X，又过 X 作 $XO \perp EH$. 阿波罗尼奥斯证明了：

$$ML^2 = EO \cdot EM.$$

这相当于将以 EM 为一边、面积等于以 ML 为边的正方形的矩形贴合到 EH 上去. 阿波罗尼奥斯指出，对于上述的三种圆锥截线来说，贴合矩形的另一边 EO 恰好分别小于(亏缺)、大于(盈余)和等于(齐同)线段 EH(他称 $EH = p$ 为正焦弦). 这就是"亏曲线"、"盈曲线"和"齐曲线"名称的由来. 阿波罗尼奥斯创用的这三个希腊名词后来经过音译转化成西方语言中对圆锥曲线的标准用语(椭圆 ellipse；双曲线

hyperbola;抛物线 parabola)①.

阿波罗尼奥斯用统一的方式引出三种圆锥曲线之后,便展开了对它们的性质的广泛讨论,内容涉及圆锥曲线的直径、共轭直径、切线、中心、双曲线的渐近线、椭圆与双曲线的焦点②以及处在各种不同位置的圆锥曲线的交点数等等.《圆锥曲线论》中包含了许多即使按今天的眼光看也是很深奥的结果,尤其突出的是第 5 卷关于从定点到一圆锥曲线的最长和最短线段的探讨,其中实质上提出了圆锥曲线的法线包络即渐屈线的概念,它们是近代微分几何的课题.第 3、4 卷中关于圆锥曲线的极点与极线的调和性质的论述,则包含了射影几何学的萌芽思想.

《圆锥曲线论》可以说是希腊演绎几何的最高成就.阿波罗尼奥斯用纯几何的手段达到了今日解析几何的一些主要结论,这是令人惊叹的.但另一方面,这种纯几何的形式,不仅使这部著作本身晦涩难懂,同时也使其后数千年间的几何学裹足不前.几何学中的新时代,要到 17 世纪,笛卡儿等人起来打破希腊式的演绎传统后才得以来临.

2.3 亚历山大后期和希腊数学的衰落

崛起于意大利半岛中部的罗马民族,在公元前 1 世纪完全征服希腊各国而夺得了地中海地区的霸权,并建立了强大的罗马帝国.唯理的希腊文明从此被务实的罗马文明所取代.同影响深远的罗马法典和气势恢弘的罗马建筑相比,罗马人在数学领域却远谈不上有什么显赫的功绩.不过,罗马统治下的亚历山大城,由于希腊文化的惯性影响以及罗马统治者对那里的自由研究的宽松态度,在相当长一段时间内仍然维持着学术中心的地位,并产生了一批杰出的数学家和数学著作.通常把从公元前 30 年到公元 6 世纪的这一段时期,称为希腊数学的"亚历山大后期".

亚历山大后期的希腊几何,已失去前期的光辉.这一时期开始阶段

① 汉名"椭圆"、"双曲线"、"抛物线"系意译,首先由清代数学家李善兰在译著《代微积拾级》(1859)创用.

② 一个令人费解的事实是《圆锥曲线论》全书未提到抛物线的焦点.

唯一值得一提的几何学家是海伦(Heron,约公元1世纪),代表作《量度》(Metrica),主要讨论各种几何图形的面积和体积的计算,其中包括后来以他的名字命名的三角形面积公式

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(Δ为三角形面积,a,b,c为边长,$s = \frac{a+b+c}{2}$),其实这一公式最先为阿基米德所发现.海伦的几何学很大程度是为满足农业和建筑等方面的测量需要,带有罗马科学的实用色彩.书中有不少命题没有证明,这在亚历山大前期数学家看来是不可思议的.

亚历山大后期几何学最富创造性的成就是三角学的建立.这方面最卓越的代表人物托勒玫(Ptolemy,约100—170),在其天文学名著《天文学大成》(Almagest,简称《大成》)中总结了在他之前的古代三角学知识,为三角学的进一步发展和应用奠定了基础.

托勒玫将圆周分成360度,角的度量采用六十进制.《大成》对于三角学最有意义的贡献是其中包含的一张弦表,即不同圆心角的弦长表,这里弦长是用半径的$\frac{1}{60}$作单位来度量.如果用crdα来记角α所对的弦,根据现在三角学中正弦函数的定义应有

$$\sin\alpha = \frac{1}{120}\mathrm{crd}2\alpha.$$

因此弦表实质上相当于正弦三角函数表.《大成》中列出$\frac{1}{2}^\circ$到180°每隔$\frac{1}{2}^\circ$的圆心角所对的弦的长度,就相当于列出从0°到90°每隔$\frac{1}{4}^\circ$的角的正弦.

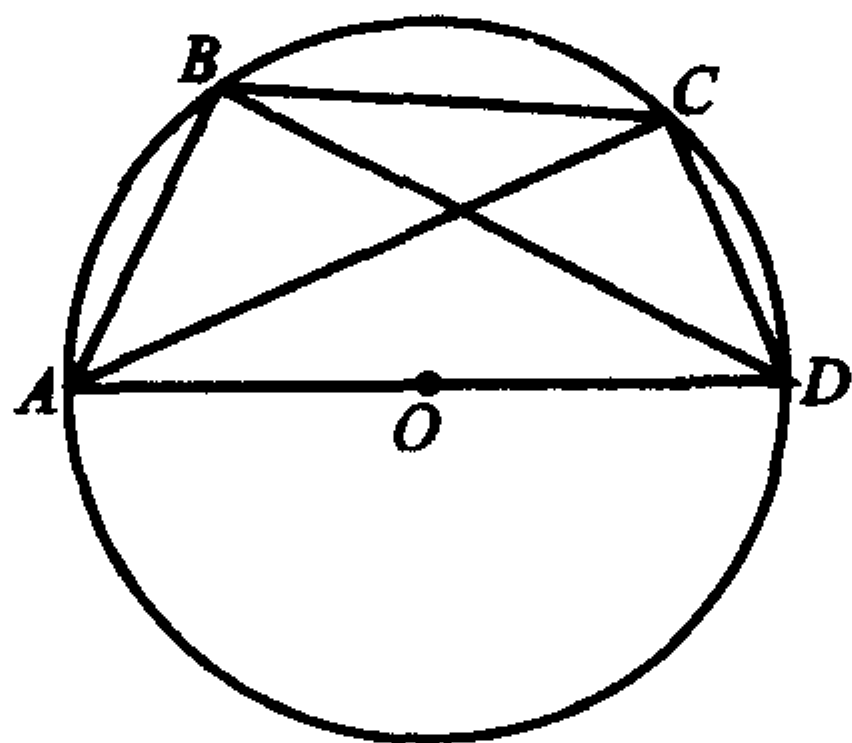


图2.18

特别重要的是托勒玫不仅给出了弦表,而且说明了编制这种表的数学原理.他的方法的基础是一条现称"托勒玫定理"的几何命题:

圆内接四边形中,两条对角线长的乘积等于两对对边长乘积之和.

借助这条定理,托勒玫证明对于如图2.18那种AD为直径时的特殊圆内接四

边形 $ABCD$,如果两条弧$\widehat{AC}$ 和$\widehat{AB}$ 所对的弦为已知,便可算出它们之差$\widehat{BC}$ 所对的弦长.他的结果相当于现代三角学已知 $\sin\alpha$ 和 $\sin\beta$ 来计算 $\sin(\beta-\alpha)$ 的公式.类似地,他还证明了相当于求 $\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 的公式.利用这些公式,以及一些已知的特殊角(如 60°,72° 等)的弦长,托勒玫逐步地推算出了他的整个弦表.

在《大成》中,托勒玫提到他的弦表是得益于前人希帕科斯(Hipparchus,约公元前 180— 前 125)的工作.希帕科斯可以看作是希腊三角学的前驱,是迄今所知最早编制过弦表的人,但他没有著作留传下来.托勒玫的弦表,是历史上第一个有明确的构造原理并流传于世的系统的三角函数表.

托勒玫在《大成》中给出了许多球面三角定理,用以解决特定的天文学问题.在这方面,他继承了比他略早的亚历山大学者梅内劳斯(Menelaus,约公元 1 世纪)的成就.梅内劳斯的著作《球面学》(Sphaerica)是球面三角学的开山之作.

托勒玫的《大成》因提出地心说而成为整个中世纪西方天文学的经典.地心说后来被基督教尊为教条,文艺复兴时期被哥白尼日心说所取代.比较而言,《大成》的三角学贡献却使托勒玫在数学史上取得了牢固的地位.

亚历山大后期希腊数学的一个重要特征,是突破了前期以几何学为中心的传统,使算术和代数成为独立的学科.这方面的先行者是尼可马科斯(Nichomachus,约公元 1 世纪).尼可马科斯著《算术入门》(Introduction Arithmetica)是第一本完全脱离了几何轨道的算术书,希腊人所谓"算术"是指今天的数论,而关于计算的学问则被他们称之为"逻辑斯谛"(Logistica).不过,在所有亚历山大后期的数学著作中,对古典希腊几何传统最离经叛道的一本是丢番图(Diophantus)的《算术》(Arithmetica).这部具有东方色彩的著作,用纯分析的途径处理数论与代数问题,可以看作是希腊算术与代数成就的最高标志.

关于丢番图本人,现在除了知道他活了 84 岁外,别无其他了解.他的年龄则是从一本公元 5 世纪前后的希腊诗文集获悉的,这本诗文集收载了一首作为丢番图墓志铭的诗歌,内容是说丢番图的童年占一生

的$\frac{1}{6}$;此后过了一生的$\frac{1}{12}$开始长胡子;再过一生的$\frac{1}{7}$后结婚;婚后5年生了个孩子,孩子活到父亲一半的年龄;孩子死后4年父亲也去世了.问丢番图活了多少岁?容易求出答案正是84岁.另外,据几种史料可推断丢番图大约公元250年前后活动于亚历山大城.

《算术》是一本问题集,据作者自序称全书共13卷,但15世纪发现的希腊文本仅有6卷.1973年在伊朗境内的马什哈德地方又发现了4卷阿拉伯文本,这样现存的丢番图《算术》共10卷(1 ~ 10),含290个问题.

丢番图《算术》特别以不定方程的求解而著称.所谓"不定方程",是指未知数个数多于方程个数的代数方程(组).这类问题在丢番图以前已有人接触过,如阿基米德"牛群问题",就涉及含8个未知数的7个方程的求解.但丢番图是第一个对不定方程问题作广泛、深入研究的数学家,以致我们今天常常把求整系数不定方程的整数解的问题叫"丢番图问题"或"丢番图分析",而将不定方程称之为"丢番图方程".

《算术》中最有名的一个不定方程是第2卷问题8,丢番图的表述是:

将一个已知的平方数分为两个平方数.

用现代符号表述,问题相当于已知平方数Z^2,求数x和y,使$x^2 + y^2 = Z^2$.在丢番图的著作里,所有的数都是指正有理数.

丢番图以$Z^2 = 16$为例来说明他的解法.他先设第一个平方数为x^2,则另一个是$16 - x^2$.所以问题变成要求$16 - x^2$是平方数y^2.设$y = mx - 4$,m是某一整数,例如$m = 2$,于是有$16 - x^2 = 4x^2 - 16x + 16$,容易解出$x = \frac{16}{5}$,$\frac{12}{5}$.当然还有其他的解,但在大多数场合,丢番图只写出一组解.

这问题之所以有名,主要是因为17世纪法国数学家费马在阅读拉丁文本《算术》(C. - G. 巴歇校订,1621年巴黎出版)时对该问题所作的一个边注,引出了后来举世瞩目的"费马大定理"[①],这也说明了丢番图这部著作对后世的深刻影响.

---

① 费马的边注是说不可能"把一个数的高于2的任何次方分成两个数的同次方的和",即方程$x^n + y^n = Z^n (n > 2)$没有正有理数解.作为丢番图上述问题8的推广考虑,费马并没有说明Z是否已知.现在所谓"费马大定理"是断言:方程$x^n + y^n = z^n (n > 2)$没有正整数解,其中x, y, z都是未知量.

丢番图《算术》的另一重要贡献是创用了一套缩写符号.特别是他使用了特殊的记号来表示未知数,据考证这个符号是 ς(希腊字母 σ 放在词尾的写法).丢番图还用专门的符号来记乘幂,二次幂记为 Δ^{Υ},三次幂是 K^{Υ},四次幂 $\Delta^{\Upsilon}\Delta$,五次幂 ΔK^{Υ} 等等.减号为 ↑,方程中所有的负项都放在一个减号后,未知数乘幂的系数是用放在该幂号后的希腊数字[1]表示,常数项记作 $\mathring{M}$.这样,方程 x^3-5x^2+8x-1 就记作

$$K^{\Upsilon}\alpha\ \varsigma\ \eta \uparrow \Delta^{\Upsilon}\varepsilon\mathring{M}\ \alpha.$$

在丢番图以前,所有的代数问题都是用文字来叙述.丢番图创用的这些记号,虽然还只具缩写性质,却不失为代数符号的滥觞.有人称丢番图类型的代数为"简写代数",是真正的符号代数出现之前的一个重要阶段.

《算术》也表现出希腊代数的一些弱点.丢番图解答代数问题是依靠高度的技巧,方法上缺乏一般性,基本上是一题一法.难怪有人说:研究了丢番图的一百道题以后,还不知道怎样去解第一百零一道题.

亚历山大最后一位重要的数学家是帕波斯(Pappus, 约公元300—350).亚历山大晚期的数学研究大都以对前代名家著作评注的形式出现,在众多的评注家中,帕波斯是最出色的一位.他唯一的传世之作《数学汇编》(Mathematical Collection),就是一部荟萃总结前人成果的典型著作,在数学史上有特殊的意义.有许多古代希腊数学的宝贵资料仅仅是由于《数学汇编》的记载而得以保存.例如用割圆曲线化圆为方;尼科米迪斯蚌线与倍立方问题之解;阿基米德的半正多面体;现存阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》中未提及的圆锥曲线的焦点、准线性质;等等.

《数学汇编》也包含了帕波斯本人的创造性贡献.突出的例子有等周问题:在周长相等的平面图形中,圆的面积最大.帕波斯还据此考察

---

① 丢番图使用的是所谓爱奥尼亚数字,用希腊字母表示,它的前10个是:

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ	ι
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

了蜂巢结构的某种极值性质.关于旋转体体积的帕波斯定理——一平面图形绕同一平面上的轴线旋转形成的立体体积,等于这图形的面积乘以其重心所画圆周的长,到17世纪被古尔丁(P.Guldin)重新发现.

《数学汇编》的有些内容还刺激了近代解析几何与射影几何的生长.最有名的是关于曾被阿波罗尼奥斯研究过的如下问题的论述:求与两定直线距离之乘积等于与另外两条定直线距离之乘积乘以一个常数的动点的轨迹.帕波斯将此问题推广到5线、6线乃至n线的情形.这个后来被笛卡儿称之为“帕波斯问题”的作图题,我们在第5章中还要进一步讨论.

《数学汇编》被认为是古希腊数学的安魂曲.帕波斯之后,希腊数学益趋衰微.喧嚣尘上的基督教在罗马被奉为国教后,将希腊学术视为异端邪说,对异教学者横加迫害.公元415年,亚历山大女数学家希帕蒂娅(Hypatia)被一群听命于主教西里尔(Cyril)的基督暴徒残酷杀害.希帕蒂娅是评注欧几里得《原本》的塞翁的女儿,她本人也注释过阿基米德、阿波罗尼奥斯和丢番图的著作,是历史上第一位杰出的女数学家.希帕蒂娅的被害预示了在基督教的阴影笼罩下整个中世纪欧洲数学的厄运.

盛极一时的古希腊学术中心亚历山大城,几经兵火,学术著作焚毁殆尽.早在公元前47年,亚历山大图书馆在罗马大帝凯撒攻城烧港时已遭重创;公元392年,疯狂的基督教徒又纵火烧毁了经过重建的亚历山大图书馆和另一处藏有大量希腊手稿的西拉比斯神庙;到公元640年,亚历山大学术宝库中残余的书籍被阿拉伯征服者最终付之一炬.希腊古代数学至此落下帷幕.

中世纪的中国数学 3

希腊几何的演绎精神，随着希腊文明的衰微而在整个中世纪的欧洲湮没不彰.数学史上继希腊几何兴盛时期之后是一个漫长的东方时期.除了埃及外，河谷地区再次成为数学活跃的舞台.中世纪数学的主角，是中国、印度与阿拉伯地区的数学.

与希腊数学相比，中世纪的东方数学表现出强烈的算法精神，特别是中国与印度数学，着重算法的概括，不讲究命题的形式推导.所谓"算法"，不只是单纯的计算，而是为了解决一整类实际或科学问题而概括出来的、带一般性的计算方法.算法倾向本来是古代河谷文明的传统，但在中世纪却有了质的提高.这一时期中国与印度的数学家们创造的大量结构复杂、应用广泛的算法，很难再仅仅被看作是简单的经验法则，它们是一种归纳思维能力的产物.这种能力与欧几里得几何的演绎风格迥然不同却又相辅相成.东方数学在文艺复兴以前通过阿拉伯人传播到欧洲，与希腊式的数学交汇结合，孕育了近代数学的诞生.

本章介绍中国数学史.就繁荣时期而言，中国数学在上述三个地区中是延续最长的.从公元前后至公元 14 世纪，先后经历了三次发展高潮，即两汉时期、魏晋南北朝时期以及宋元时期，其中宋元时期达到了中国古典数学的顶峰.

3.1 《周髀算经》与《九章算术》

3.1.1 古代背景

第 1 章中已涉及中国远古数与形概念的萌芽. 古代著作《世本》中提到黄帝使“隶首作算数”,但这只是传说. 无论如何,殷商甲骨文中已经使用完整的十进制记数. 至迟到春秋战国时代,又开始出现严格的十进位值制筹算记数,我们今天还可以从现存的公元前 3 世纪的刀币上看到这种记数法.《孙子算经》(参见 3.2) 中记载的筹算记数法则说:“凡算之法,先识其位. 一纵十横,百立千僵. 千十相望,万百相当”. 据此我们知道筹算记数有纵横两种形式(参见 1.1). 纵式用来表示个位、百位、万位、…… 数字;横式用来表示十位、千位、十万位 …… 数字. 纵、横相间,零则以空位表示. 这样,数 6724 用算筹表示出来是 𝍮𝍦𝍪𝍣 ;76 031 则记作 𝍦𝍮 𝍫𝍠 ,等等. 这种十进位值记数法是中国古代数学对人类文明的特殊贡献.

关于几何学,《史记》“夏本纪” 记载说: 夏禹治水,“左规矩,右准绳”.“规” 是圆规,“矩” 是直角尺,“准绳” 则是确定铅垂方向的器械. 这些都说明了早期几何学的应用. 从战国时代的著作《考工记》中也可以看到与手工业制作有关的实用几何知识.

战国(公元前 475— 前 221) 诸子百家,与希腊雅典学派时代相当.“百家” 就是多种不同的学派,其中的“墨家” 与“名家”,其著作包含有理论数学的萌芽. 如《墨经》(约公元前 4 世纪著作) 中讨论了某些形式逻辑的法则,并在此基础上提出了一系列数学概念的抽象定义:

点:“端,体之无厚而最前者也”;

直线:“直,参也”;

圆:“圜,一中同长也”;

正方形:“方,柱隅四杂也”;

平行:“平,同高也”;

体积:"厚,有所大也"

等等,大约有 17 条之多.《墨经》中甚至涉及到"有穷"与"无穷",说"或不容尺,有穷;莫不容尺,无穷也".以善辩著称的名家,对无穷概念则有更进一步的认识,如据《庄子》记载,属名家的惠施曾提出:"至大无外谓之大一;至小无内谓之小一",这里"大一"、"小一"有无穷大与无限小之意.

名家主要是辩论哲学概念,但《庄子》中记载他们的多条名辩,也可以从数学的意义上去理解,其中最有名的如:

矩不方,规不可以为圆;

飞鸟之影未尝动也;

镞矢之疾,而有不行不止之时;

一尺之棰,日取其半,万世不竭

等等,可以说与希腊芝诺学派的悖论遥相呼应.

不过名、墨两家在先秦诸子中是属例外情形,其他包括儒、道、法等各家的著作则很少关心与数学有关的论题,而只注重社会伦理、修心养身、经世治国之道,这与古代希腊的学派有很大的不同.秦始皇统一中国,结束了百家争鸣的局面.到汉武独尊儒术,名、墨著作中的数学论证思想,便失去进一步成长的机会.两汉时期的数学,主要是沿着实用与算法的方向发展,并取得了很大的成就.

3.1.2 《周髀算经》

在现存的中国古代数学著作中,《周髀算经》是最早的一部.

《周髀算经》作者不详,成书年代据考应不晚于公元前 2 世纪西汉时期,但书中涉及的数学、天文知识,有的可以追溯到西周(公元前 11 世纪 — 前 8 世纪).这部著作实际上是从数学上讨论"盖天说"宇宙模型,反映了中国古代数学与天文学的密切联系.从数学上看,《周髀算经》主要的成就是分数运算、勾股定理及其在天文测量中的应用,其中关于勾股定理的论述最为突出.

《周髀算经》卷上记载西周开国时期周公与大夫商高讨论勾股测量的对话,商高答周公问时提到"勾广三,股修四,径隅五",这是勾股定

理的特例.卷上另一处叙述周公后人荣方与陈子(约公元前6、7世纪)的对话中,则包含了勾股定理的一般形式:

"……以日下为勾,日高为股,勾股各自乘,并而开方除之,得邪至日."

这是从天文测量中总结出来的普遍定理.《周髀算经》中还讨论测量"日高"的方法.如图3.1,设在 A,B 两处立表(即"髀")AA' 与 BB',记表高为 h,表距为 ρ,两表日影差为 $d(d = BD - AC)$,《周髀算经》相当于给出了日高公式

$$日高\ SO = H + h = h + \frac{h \times \rho}{d}.$$

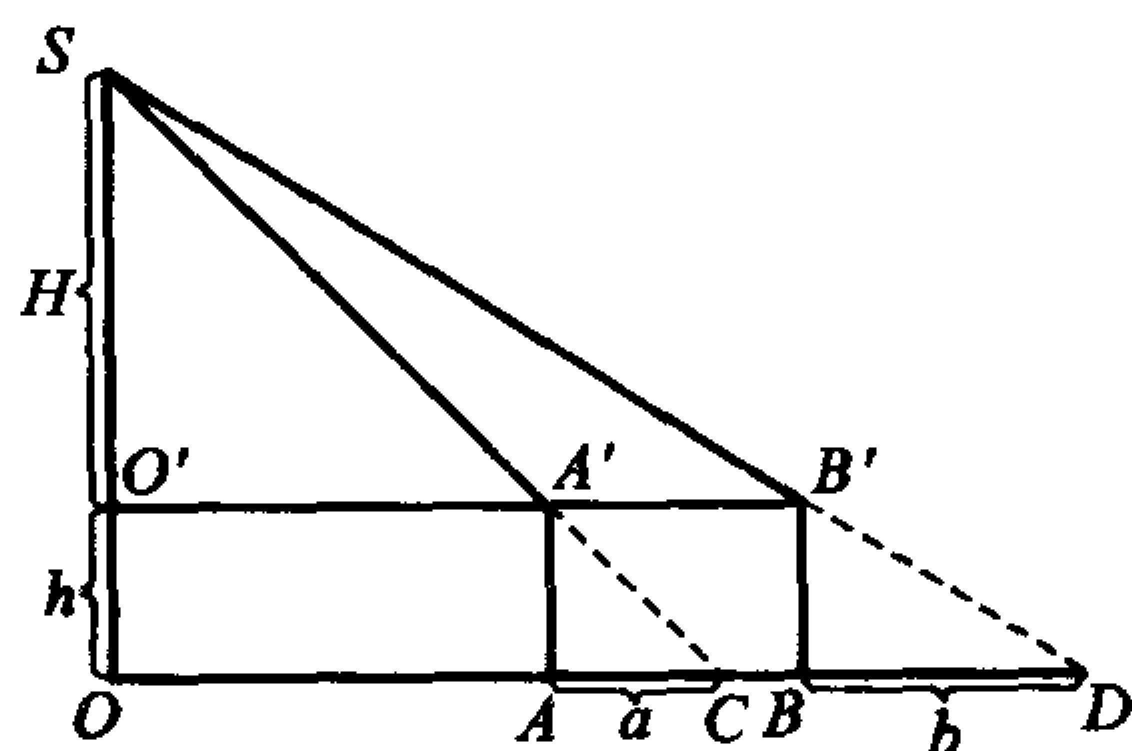


图 3.1

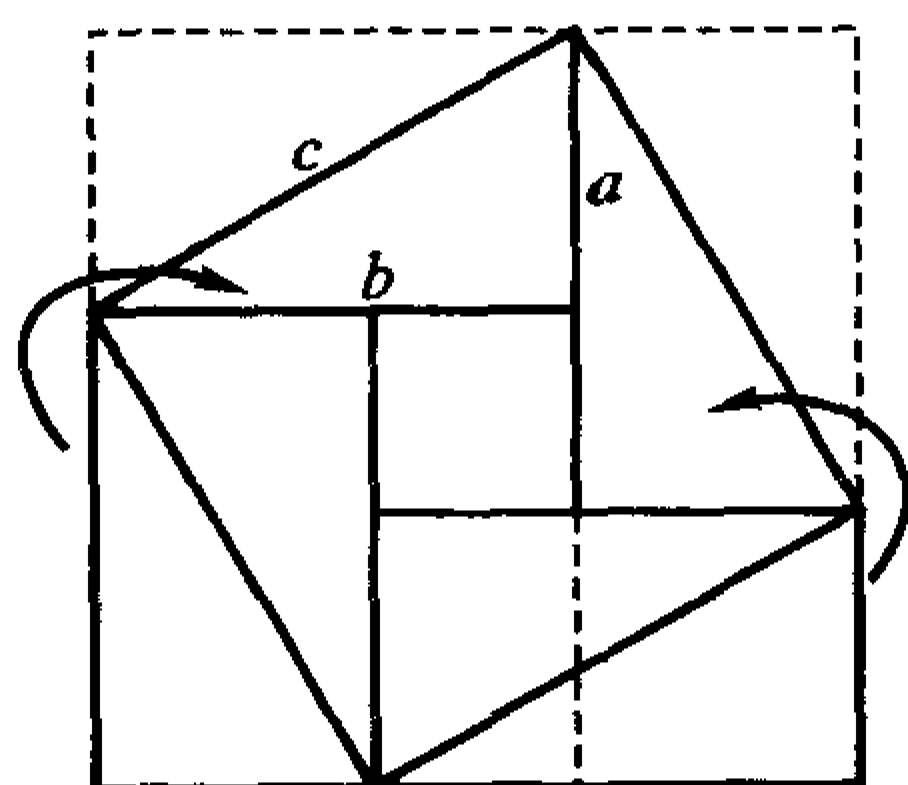


图 3.2

《周髀算经》主要是以文字形式叙述了勾股算法.中国数学史上最先完成勾股定理证明的数学家,是公元3世纪三国时期的赵爽.赵爽注《周髀算经》,作"勾股圆方图",其中的"弦图",相当于运用面积的出入相补证明了勾股定理.如图3.2,考虑以一直角三角形的勾和股为边的两个正方形的合并图形,其面积应有 $a^2 + b^2$.如果将这合并图形所含的两个三角形移补到图中所示的位置,将得到一个以原三角形之弦为边的正方形,其面积应为 c^2,因此 $a^2 + b^2 = c^2$.

赵爽这一简洁优美的证明,可以看作是对《周髀算经》中紧接在"勾三股四弦五"特例之后的一段说明文字的诠释,《周髀算经》的这段文字说:"既方之,外半其一矩,环而共盘,得成三、四、五.两矩共长二十有五,是谓积矩".

赵爽在"勾股圆方图"说中还类似地证明了勾股定理的许多推论,此外他还给出了一张"日高图",是用面积出入相补的方法去证明《周髀算经》中的日高公式.

3.1.3 《九章算术》

《九章算术》是中国古典数学最重要的著作.这部著作的成书年代,根据现在的考证,至迟在公元前1世纪,但其中的数学内容,有些也可以追溯到周代.《周礼》记载西周贵族子弟必学的六门课程("六艺")中有一门是"九数",刘徽《九章算术注》"序"中就称《九章算术》是由"九数"发展而来,并经过西汉张苍(?—公元前152)、耿寿昌等人删补.近年发现的湖北张家山汉初古墓竹简《算数书》(1984年出土),有些内容与《九章算术》类似.因此可以认为,《九章算术》是从先秦至西汉中叶的长时期里经众多学者编纂、修改而成的一部数学著作.

《九章算术》采用问题集的形式,全书246个问题,分成九章,依次为:方田,粟米,衰分,少广,商功,均输,盈不足,方程,勾股.其中所包含的数学成就是丰富和多方面的.

(一) 算术方面

(1) 分数四则运算法则.《九章算术》"方田"章给出了完整的分数加、减、乘、除以及约分和通分运算法则.其中"约分术"给出了求分子、分母最大公约数(中国古代数学家称最大公约数为"等数")的"更相减损"法,与欧几里得《原本》卷Ⅶ中给出的方法是一致的.

(2) 比例算法.《九章算术》"粟米"、"衰分"、"均输"诸章集中讨论比例问题,并提出"今有术"作为解决各类比例问题的基本算法.设从比例关系

$$a : b = c : x$$

求 x,《九章算术》称 a 为"所有率",b 为"所求率",c 为"所有数",x 为"所求数".今有术:"以所有数乘所求率为实,以所有率为法,实如法而一"相当于 $x = \frac{bc}{a}$.我们知道,希腊人的比例论是几何线段的比例论,

数字比例算法在欧洲出现颇晚，被称为“三率法”，有时也叫“黄金法则”.

以“今有术”为基础，“衰分”章处理各种正、反比例分配问题，“衰分”就是按一定级差分配.“均输”章则运用比例分配解决粮食运输负担的平均分配.

(3) 盈不足术.“盈不足”术是以盈亏类问题为原型，通过两次假设来求繁难算术问题的解的方法.《九章算术》中典型的盈亏类问题如：

“今有共买物，人出八盈三；人出七不足四.问人数、物价各几何?”

一般地假设人数为 x，物价为 y，每人出钱 a_1 盈 b_1，出钱 a_2 不足 b_2.《九章算术》“盈不足术”相当于给出解法：

$$x=\frac{b_1+b_2}{a_1-a_2},$$

$$y=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1-a_2},$$

$$\frac{y}{x}=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}.$$

任何算术问题(不一定是盈亏类问题)，通过两次假设未知量的值，都可以转换成盈亏类问题来求解.《九章算术》“盈不足”章就用这种方法解决了许多不属于盈亏类的问题.

如果我们设所求算术问题的答数 x 满足一个方程 $f(x)=0$.先假设一个答数 x_1，此时对应的 $f(x_1)$ 为 y_1；再假设一个答数 x_2，此时对应的 $f(x_2)$ 为 $-y_2$，则可按盈不足术求出

$$x=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)},$$

对一次函数这个解答是精确的；对非线性函数这个解答只是 x 的一个线性近似值.盈不足术实质上是一种线性插值法.

“盈不足术”在中世纪阿拉伯数学著作中称为“契丹算法”，即中国算法.13 世纪意大利数学家斐波那契《算经》一书中也有一章讲“契丹算法”.

(二) 代数方面

《九章算术》在代数方面的成就是具有世界意义的.

(1) 方程术."方程术"即线性联立方程组的解法.以"方程"章第1题为例:

"今有上禾三秉,中禾二秉,下禾一秉,实三十九斗;上禾二秉,中禾三秉,下禾一秉,实三十四斗;上禾一秉,中禾二秉,下和三秉,实二十六斗.问上、中、下禾实一秉各几何?"

题中"禾"为黍米,"秉"指捆,"实"是打下来的粮食.设上、中、下禾各一秉打出的粮食分别为 x,y,z(斗),则问题就相当于解一个三元一次联立方程组:

$$\begin{cases}3x+2y+z=39,\\2x+3y+z=34,\\x+2y+3z=26.\end{cases}$$

《九章算术》没有表示未知数的符号,而是用算筹将 x,y,z 的系数和常数项排列成一个(长)方阵[图3.3(i),其中已将筹算数码换作阿拉伯数码],这就是"方程"这一名称的来源.注意这里采取的是自右至左纵向排列."方程术"的关键算法叫"遍乘直除",在本例中演算程序如下:

用图3.3(i)右行上禾(x)的系数3"遍乘"中行和左行各数,然后从所得结果按行分别"直除"右行,即连续减去右行对应各数,就得到图3.3(ii)所示的新方程.

其次以图3.3(ii)中行中禾(y)的系数5遍乘左行各数,从所得结果直除中行并约分,又得到图3.3(iii)所示的新方程.其中左行未知量系数只剩一项,以4除11,即得下禾(z) $=2\frac{3}{4}$(斗).

为求上禾(x)和中禾(y),重复"遍乘直除"程序.以图3.3(iii)左行下禾(z)的系数4遍乘中行

(i)

左行	中行	右行
1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

↓

(ii)

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

↓

(iii)

0	0	3
0	5	2
4	1	1
11	24	39

↓

(iv)

0	0	4
0	4	0
4	0	0
11	17	37

图3.3

和右行各数，从所得结果按行分别直除左行并约分，最后得到图 3.3(iv) 所示的新方程. 由此方程计算得

$$上禾(x) = 9\frac{1}{4},$$

$$中禾(y) = 4\frac{1}{4},$$

$$下禾(z) = 2\frac{3}{4}.$$

很清楚,《九章算术》方程术的遍乘直除算法,实质上就是我们今天所使用的解线性联立方程组的消元法,西方文献中称之为"高斯消去法".《九章算术》方程术,是世界数学史上的一颗明珠.

(2) 正负术.《九章算术》在代数方面的另一项突出贡献是负数的引进. 在方程术中,当我们用遍乘直除算法消元时,可能出现减数大于被减数的情形,不引入负数就不可能保障"直除"程序的进行.《九章算术》正是在"方程"章中提出了"正负术",即正、负数的加减运算法则:

"同名相除,异名相益,正无入负之,负无入正之. 其异名相除,同名相益,正无入正之,负无入负之."

"同名"、"异名"即同号、异号;"相益"、"相除"指二数绝对值相加、相减. 用现代符号表述,设 $a > b > 0$,则上述正负术相当于

减法法则(前四句):

$(\pm a) - (\pm b) = \pm(a - b), (\pm b) - (\pm a) = \mp(a - b);$

$(\pm a) - (\mp b) = \pm(a + b);$

$0 - a = -a;$

$0 - (-a) = +a.$

加法法则(后四句):

$(\pm a) + (\mp b) = \pm(a - b), (\pm b) + (\mp a) = \mp(a - b);$

$(\pm a) + (\pm b) = \pm(a + b);$

$0 + a = a;$

$0 + (-a) = -a.$

对负数的认识是人类数系扩充的重大步骤. 如果说古希腊无理量是演绎思维的发现,那么如前所述可以看到,中算负数则是算法思维的

产物.中算家们心安理得地接受并使用了这一概念,并没有引起震撼与迷惑.

《九章算术》之后,魏晋时期的数学家刘徽对负数的出现就作了很自然的解释:"两算得失相反,要令正负以名之",并主张在筹算中用红筹代表正数,黑筹代表负数.

7 世纪时的印度数学家也开始使用负数.对负数的认识在欧洲却进展缓慢,甚至到 16 世纪韦达的著作还回避使用负数.

(3) 开方术.《九章算术》"少广"章有"开方术"和"开立方术",给出了开平方和开立方的算法.《九章算术》开方术本质上是一种减根变换法,开创了后来开更高次方和求高次方程数值解之先河.用现代记号表述,《九章算术》开方术相当于解方程

$$x^2 = A.$$

设解 x 是一个 k 位数,令 $x = 10^{k-1}x_1$,方程变为:

$$10^{2k-2}x_1^2 = A.$$

议得 x_1 的整数部分,记为 $\bar{x}_1$,令 $x_1 = \bar{x}_1 + 10^{-1}x_2$,则方程变为:

$$a_1x_2^2 + b_1x_2 = A_1,$$

其中

$$a_1 = 10^{2k-2}\cdot 10^{-2}; b_1 = 10^{2k-2}\cdot 10^{-1}\cdot 2\bar{x}_1; A_1 = A - 10^{2k-2}\bar{x}_1^2.$$

再议得 x_2 的整数部分,记为 $\bar{x}_2$,令 $x_2 = \bar{x}_2 + 10^{-1}x_3$,则方程变为:

$$a_2x_3^2 + b_2x_3 = A_2,$$

其中

$$a_2 = 10^{-2}\cdot a_1;\ b_2 = [a_1\bar{x}_2 + (a_1\bar{x}_2 + b_1)]\cdot 10^{-1};$$

$$A_2 = A_1 - (a_1\bar{x}_2 + b_1)\bar{x}_2.$$

上述程序,很容易在筹算盘上实施.《九章算术》开方术中借一根算筹表示未知量的平方,开立方术中则借一根算筹表示未知量的立方,使整个筹式具有代数方程的意义.

《九章算术》开方术实际上包含了二次方程 $x^2 + bx = c$ 的数值求解程序,也就是上述求 x_2 和 x_3 的程序,称为"开带从平方法".

《九章算术》开方术中特别令人惊异之处,是指出了存在有开不尽

的情形:“若开之不尽者,为不可开”,并给这种不尽根数起了一个专门名字——“面”.《九章算术》时代的中国数学家,如同他们对待负数的发现一样,对在开方过程中接触到的无理量也这样泰然处之.这或许是因为引导他们发现不尽根数的算法本身,使他们能够有效地计算这种不尽根数的近似值.事实上,稍后的刘徽在“开方术注”中就明确提出了用十进制小数任意逼近不尽根数的方法,他称之为求微数法,并指出在开方过程中,“其一退以十为母,其再退以百为母,退之弥下,其分弥细,则朱幂虽有所弃之数,不足言之也.”

(三)几何方面

《九章算术》“方田”、“商功”和“勾股”三章处理几何问题.其中“方田”章讨论面积计算,“商功”章讨论体积计算,“勾股”章则是关于勾股定理的应用.

《九章算术》中的几何问题具有很明显的实际背景,如面积问题多与农田测量有关,体积问题则主要涉及工程土方计算.各种几何图形的名称就反映着它们的现实来源.如平面图形有:“方田”(正方形)、“直田”(矩形)、“圭田”(三角形)、“箕田”(梯形)、“圆田”(圆)、“弧田”(弓形)、“环田”(圆环)等;立体图形则有“仓”(长方体)、“方堢垟”(正方柱)、“圆堢垟”(直圆柱)、“方亭”(平截头方锥)、“堑堵”(底面为直角三角形的正柱体)、“阳马”(底面为长方形而有一棱与底面垂直的锥体)、“鳖臑”(底面为直角三角形而有一棱与底面垂直的锥体)、“羡除”(三个侧面均为梯形的楔形体)以及“刍童”(上、下底面都是长方形的棱台)等等.

《九章算术》中给出的所有直线形的面、体积公式都是准确的.例如刍童(图3.4)体积公式为:

$$V = \frac{h}{6}[(2b + d)a + (2d + b)c],$$

羡除(图3.5)体积公式为:

$$V = \frac{1}{6}(a + b + c)hl.$$

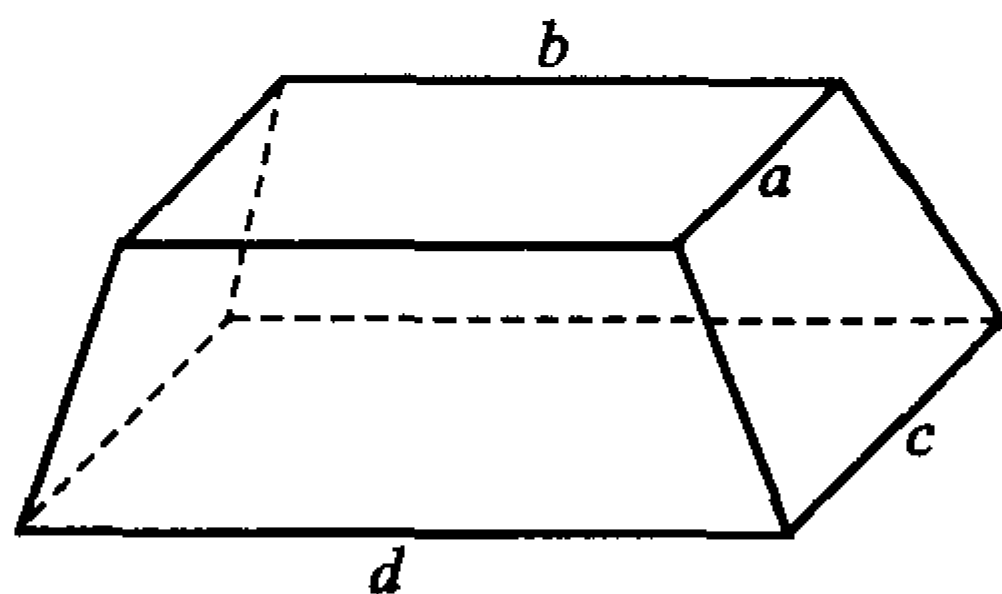


图 3.4

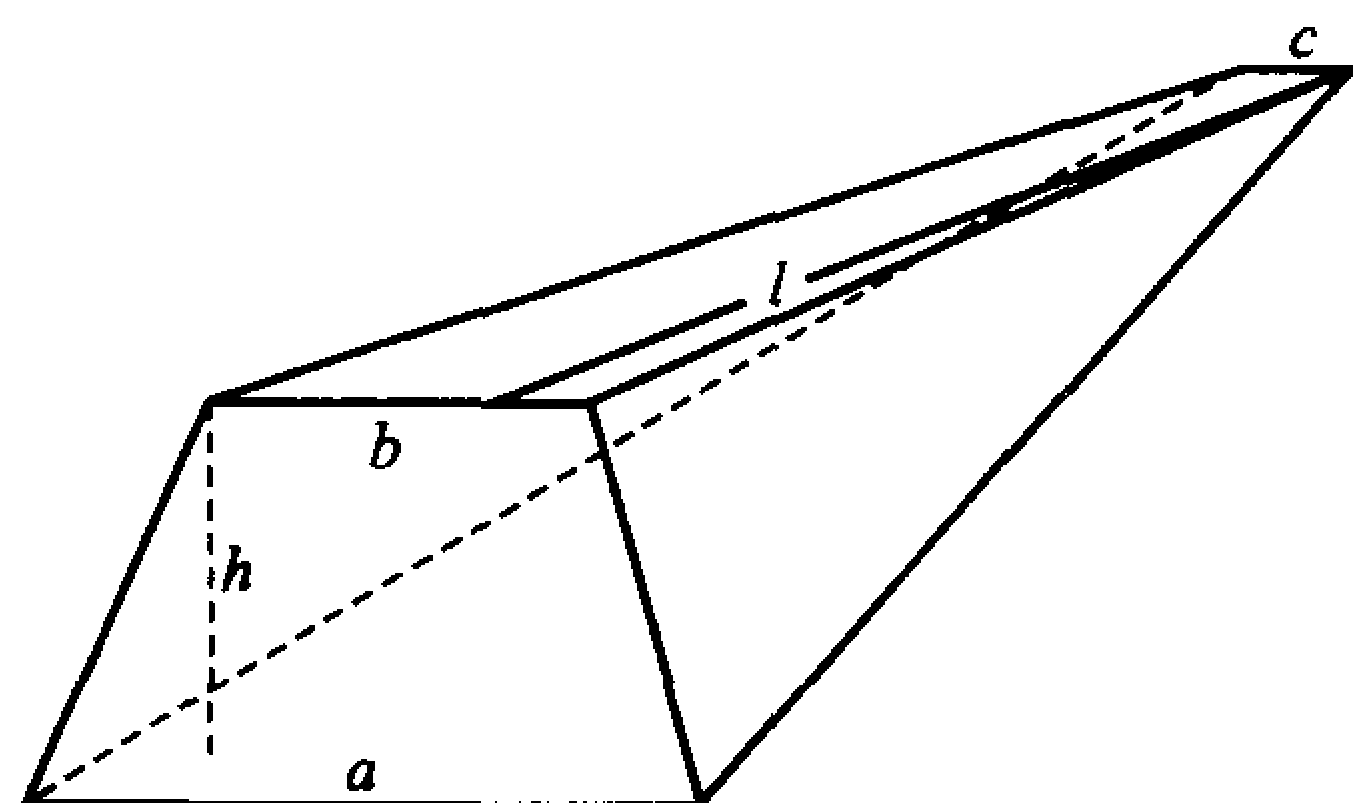


图 3.5

《九章算术》方田章"圆田术"圆面积公式 $A = \pi R^2$ 是正确的,但以 3 为圆周率,失诸粗疏."开立圆术"则相当于给出球体积公式 $V = \frac{3}{16}\pi D^3$(D 为直径),这是不正确的,加之取 $\pi = 3$,球体积 $V = \frac{9}{16}D^3$,误差过大.

与欧几里得《原本》中将代数问题几何化的做法相反,《九章算术》将几何问题算术化和代数化.在"勾股章"中可以找到典型的例子.勾股章讲述勾股定理及其应用,其中第 20 题:"今有邑方不知大小,各中开门.出北门二十步有木.出南门十四步,折而西行一千七百七十五步见木.问邑方几何?"如图 3.6,《九章算术》的解法是以 $CB \times ED \times 2 = 71\ 000$ 为"实"(常数项),以 $CB + EF = 34$ 为"从法"(一次项系数),然后"开方除之",相当于解一个二次方程

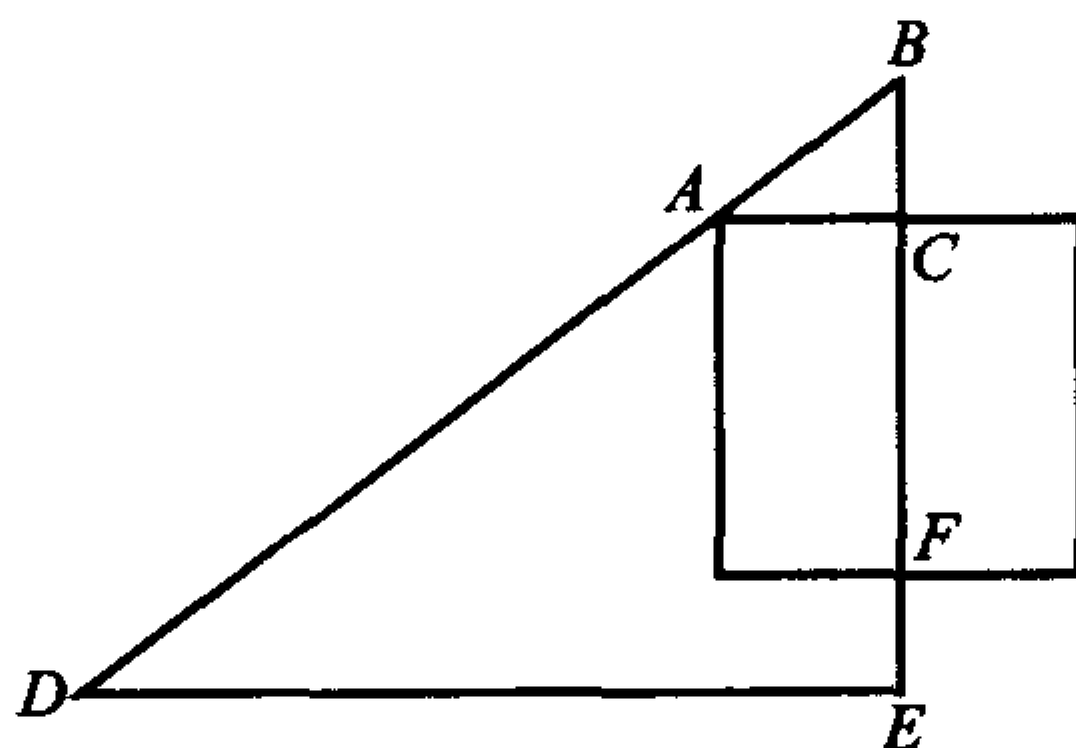


图 3.6

$$x^2 + 34x = 71\,000.$$

这种几何代数化的做法，经过刘徽和更晚的宋、元数学家的发扬，成为中国古典数学的重要特征.

《九章算术》对于它所给出的几何问题的算法，一律没有推导证明. 可以说《九章算术》中的几何部分主要是实用几何. 但稍后的魏晋南北朝，却出现了证明《九章算术》中那些算法的努力，从而引发了中国古典几何中最闪亮的篇章.

3.2　从刘徽到祖冲之

从公元220年东汉分裂，到581年隋朝建立，史称魏晋南北朝. 这是中国历史上的动荡时期，但同时也是思想相对活跃的时期. 在长期独尊儒学之后，学术界思辩之风再起. 在数学上也兴起了论证的趋势，许多研究以注释《周髀算经》、《九章算术》的形式出现，实质是要寻求这两部著作中一些重要结论的数学证明. 这方面的先锋，是前面已介绍过的赵爽，而最杰出的代表是刘徽和祖冲之父子，他们的工作，使魏晋南北朝成为中国数学史上一个独特而丰产的时期.

3.2.1　刘徽的数学成就

关于刘徽的生平，我们几乎什么都不了解.《隋书》"律历志" 中提到"魏陈留王景元四年刘徽注九章"，由此知道刘徽是公元3世纪魏晋时人，并于公元263年(即景元四年) 撰《九章算术注》.《九章算术注》包含了刘徽本人的许多创造，完全可以看成是独立的著作，奠定了这位数学家在中国数学史上的不朽地位.

刘徽数学成就中最突出的是"割圆术" 和体积理论.

(一) 割圆术

刘徽在《九章算术》方田章"圆田术" 注中，提出割圆术作为计算圆的周长、面积以及圆周率的基础. 割圆术的要旨是用圆内接正多边形去逐步逼近圆. 刘徽从圆内接正六边形出发，将边数逐次加倍，并计算逐

次得到的正多边形的周长和面积.他指出:“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆合体而无所失矣.”

如图3.7,设圆面积为 S_0,半径为 r,圆内接正 n 边形边长为 l_n,周长为 L_n,面积为 S_n.将边数加倍后,得到圆内接正 $2n$ 边形,其边长、周长、面积分别记为 l_{2n}, L_{2n}, S_{2n}.

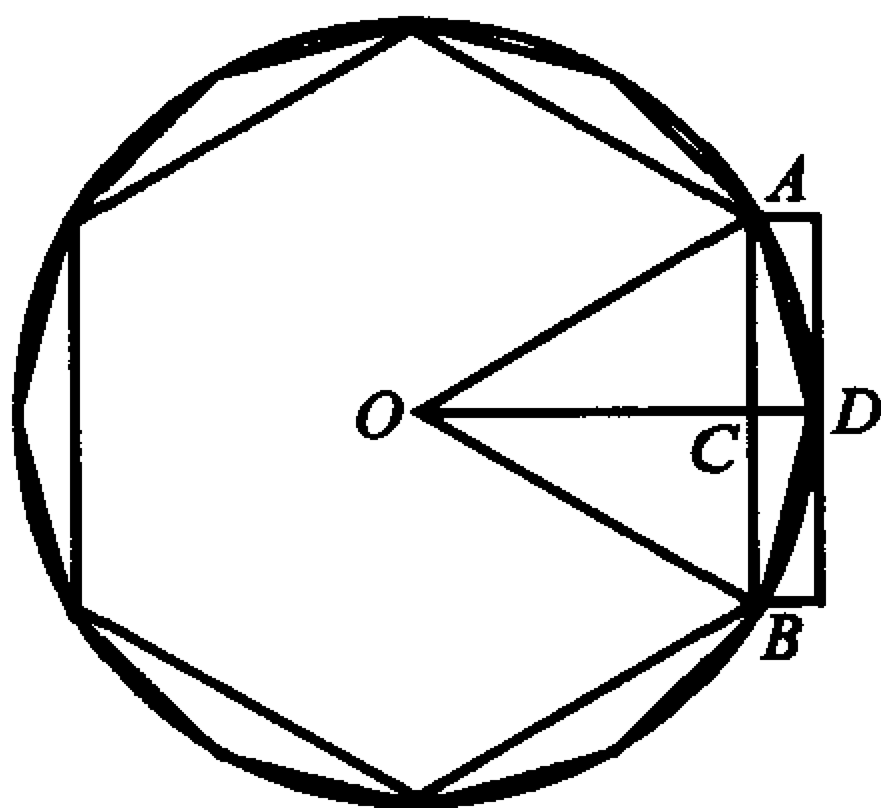


图3.7

刘徽首先注意到,当 l_n 已知,就可用勾股定理求出 l_{2n}.实际上,如图所示可得

$$l_{2n} = AD = \sqrt{AC^2 + CD^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}l_n\right)^2 + \left[r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}l_n\right)^2}\right]^2}.$$

知道了内接正 n 边形的周长 L_n,又可求得正 $2n$ 边形的面积:

$$S_{2n} = n\left(\frac{1}{2}AB \cdot OD\right) = n \cdot \frac{l_n r}{2} = \frac{1}{2}L_n \cdot r.$$

刘徽割圆术还注意到,如果在内接 n 边形的每边上作一高为 CD 的矩形,就可证明

$$S_{2n} < S_0 < S_{2n} + (S_{2n} - S_n).$$

这样,不必计算圆外切正多边形就可以推算出圆周率的上限和下限.

刘徽从圆内接正六边形出发,并取半径 r 为1尺,一直计算到192边形,得出了圆周率的精确到小数后二位的近似值 $\pi \approx 3.14$,化成分数为 $\frac{157}{50}$,这就是有名的“徽率”.刘徽一再声明:“此率尚微少”,需要的

话,可以继续算下去,得出更精密的近似值来.

我们知道,《九章算术》使用的圆周率是 3. 从西汉末年开始,新率陆续出现,但仍然很不精确并且没有推算方法. 刘徽是中算史上第一位建立可靠的理论来推算圆周率的数学家.

(二) 体积理论

像阿基米德一样,刘徽倾力于面积与体积公式的推证,并取得了超越时代的漂亮结果.

刘徽的面积、体积理论建立在一条简单而又基本的原理之上,这就是他所谓的"出入相补"原理:一个几何图形(平面的或立体的)被分割成若干部分后,面积或体积的总和保持不变. 在平面情形,刘徽利用这条原理成功地证明了《九章算术》中许多面积公式,但当他转向立体情形时,却发现"出入相补"的运用即使对于像"阳马"这样看似简单的立体也遇到了很大的困难. 这里实质性的障碍在于:与平面情形不同,并不是任意两个体积相等的立体图形都可以剖分或拼补(也就是中国古代数学家所说的"出入相补")相等. 但这是到20世纪才弄清楚的(参见11.1,希尔伯特问题). 古代数学家并未明确认识到这一点,不过为了在体积问题上有所作为,一些一流的数学家都不约而同地借助于无限小方法来绕越上述的障碍. 我们已经看到了古希腊阿基米德等人的例子. 在这方面,刘徽同样表现出了惊人的智慧. 他在推证《九章算术》中的一些立体体积公式时,灵活地使用了两种无限小方法:极限方法与不可分量方法. 以下我们分别以"阳马"体积公式与球体积公式的证明为例来说明刘徽的思想.

(1) 阳马术.《九章算术》"商功章"阳马术给出阳马的体积公式为其三条直角边乘积的三分之一. 为了证明这一公式,刘徽从一长方体出发[图 3.8(i)],将它斜分成两个"堑堵"[图 3.8(ii)],然后再斜分堑堵得到两个立体图形[图 3.8(iii)],其中一个就是阳马,另一个就是鳖臑. 刘徽欲证阳马体积 Y 与鳖臑体积 B 之比为 $2:1$,由此即可推出阳马体积公式 $Y=\frac{1}{3}abc$(a,b,c 分别为长方体的三边之长). 比率 $Y:B=2:1$ 应该对任意长方体都成立,刘徽称之为"不易之率".

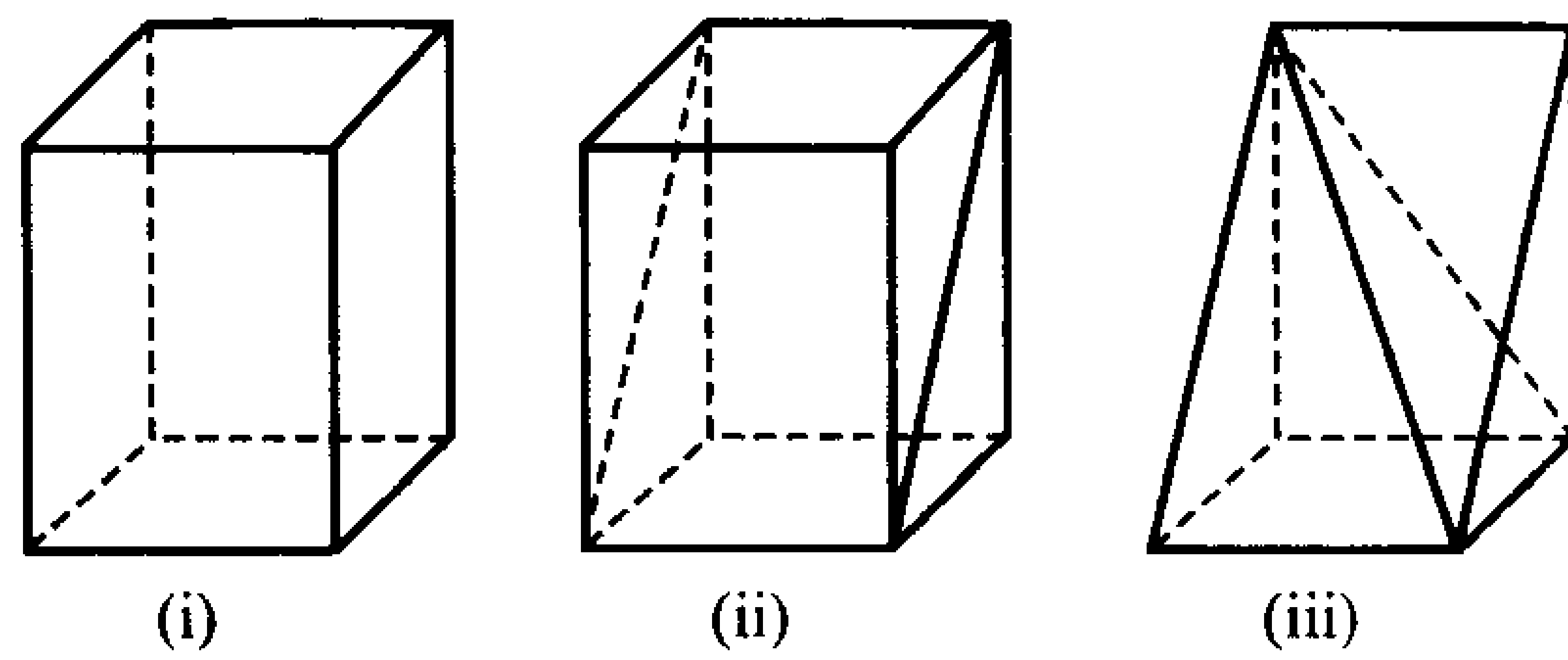


图 3.8

正是为了证明这个“不易之率”，在感到出入相补无能为力的情况下，刘徽使用了极限的方法，他的方法记载在《九章算术》阳马术注中，可以用现代语言表述如下.

如图 3.9，记上述斜分得到的阳马为 *BDFEC*，鳖臑为 *BACE*，取 *BD* 之中点 *H*，过 *H* 作 *BD* 的垂直平面，按图所示将阳马剖分为 1 个小长方体(*HILKNDRO*)；2 个小堑堵(*ILORCP* 和 *KLONFQ*)和 2 个小阳马(*BHILK* 和 *LOPEQ*)；同时将鳖臑剖分为 2 个小堑堵(*AGIJML* 和 *ILMJCP*)和 2 个小鳖臑(*BGIL* 和 *EPML*).

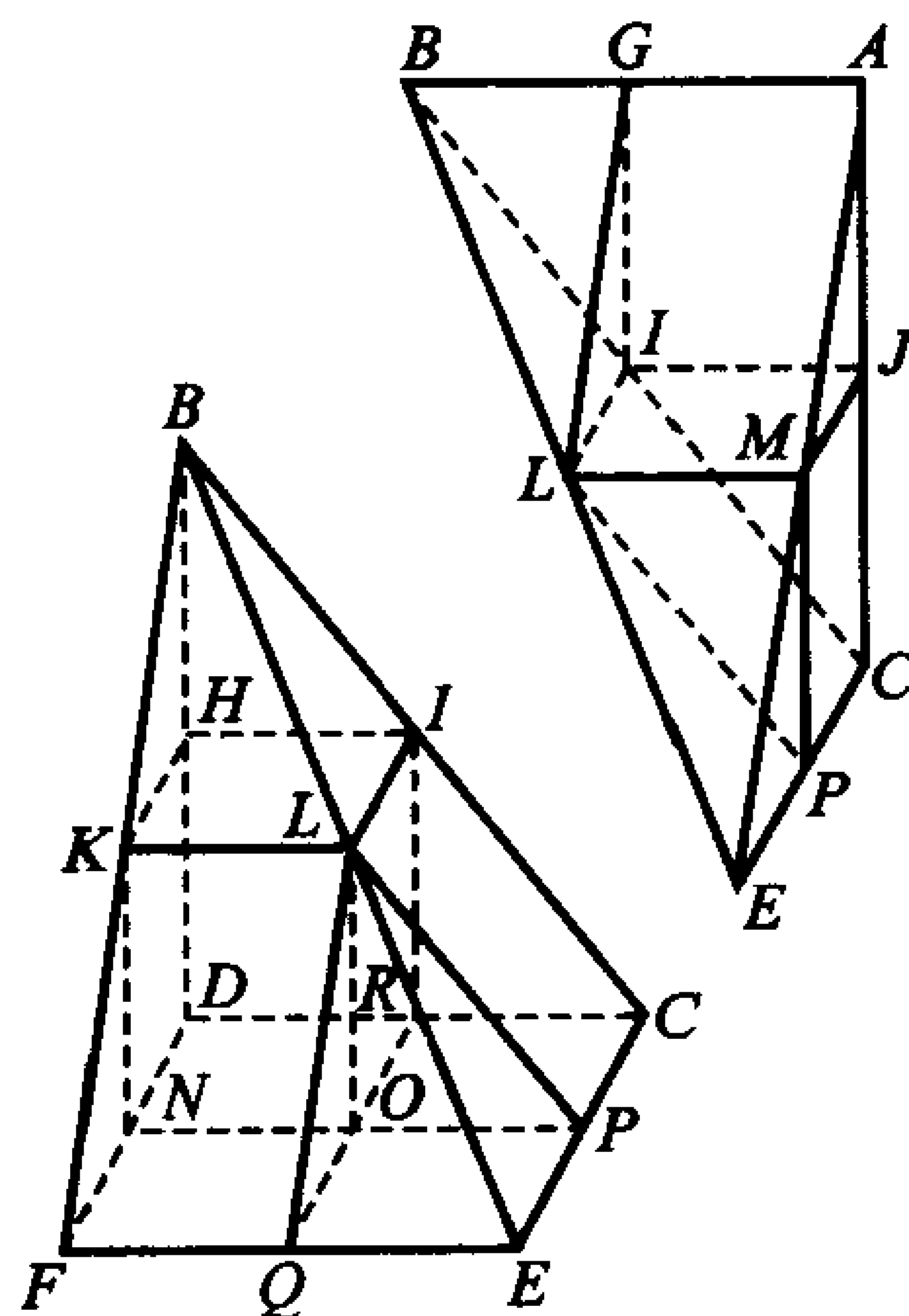


图 3.9

容易看出，阳马中除去 2 个小阳马的部分的体积(记为 Y_1')为鳖臑

中除去2个小鳖臑的部分的体积(记为B_1')的2倍,它们合在一起(刘徽称其为“已知”部分)的体积的应占原堑堵体积的$\frac{3}{4}$,因而剩余部分(即2个小阳马和2个小鳖臑,刘徽称其为“未知”部分)的体积应占原堑堵体积的$\frac{1}{4}$.

若分别用Y_1、B_1记每个小阳马和小鳖臑的体积,则有

$$Y = Y_1' + 2Y_1,$$
$$B = B_1' + 2B_1,$$

其中Y_1与B_1之比仍未知.

对每个小阳马和每个小鳖臑又可进行同样的剖分,对第n次剖分,有

$$Y = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} Y_i' + 2^n Y_n,$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} B_i' + 2^n B_n,$$

其中已知部分属阳马的体积为$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} Y_i'$,属鳖臑的体积为$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} B_i'$,两者的比值恒为2:1(因对每个$i$有$Y_i' = 2B_i'$).至于未知部分的体积,若记为$u_n$,并无妨一般地设原堑堵体积为1,则

$$u_n = 2^n Y_n + 2^n B_n = 2^n (Y_n + B_n) = 2^{n-1} \cdot 2(Y_n + B_n),$$

而根据前面的步骤应有$2(Y_n + B_n) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$,于是得到$u_n = 2^{n-1} \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} = \frac{1}{4^n}$,当$n$无限增大时,$u_n$就趋于0.刘徽认为,这样无限剖分下去,在极限的情形就得到“不易之率”:

$$Y : B = 2 : 1.$$

(2) 球体积.刘徽首先指出了《九章算术》中的球体积公式是不正确的,并在《九章算术》“开立圆术”注文中指出了一条推算球体积公式的正确途径.

刘徽创造了一个新的立体图形,他称之为“牟合方盖”,并指出:一

旦算出牟合方盖的体积,球体积公式也就唾手可得.

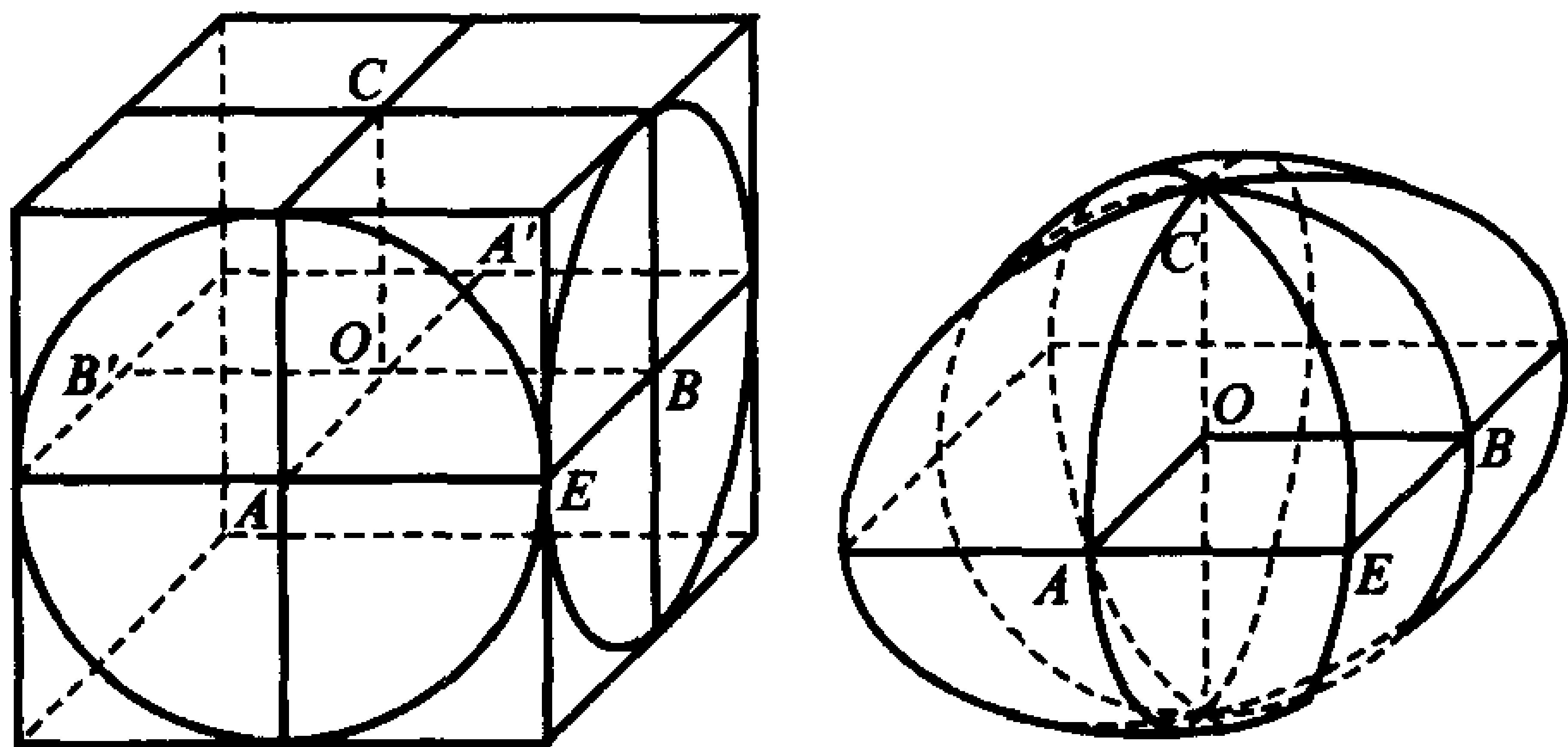


图 3.10

如图 3.10,在一立方体内作两个互相垂直的内切圆柱.这两个圆柱体相交的部分,就是刘徽所说的"牟合方盖".牟合方盖恰好把立方体的内切球包含在内并且同它相切.如果用同一个水平面去截它们,就得到一个圆(球的截面),和它的外切正方形(牟合方盖的截面).刘徽指出,在每一高度上的水平截面圆与其外切正方形的面积之比都等于$\frac{\pi}{4}$,因此球体积与牟合方盖体积之比也应该等于$\frac{\pi}{4}$.刘徽在这里实际已用到了西方微积分史著作中所说的"卡瓦列利原理",可惜没有将它总结为一般形式.牟合方盖的体积怎么求呢?刘徽终于未能解决.最后他说:"敢不阙疑,以俟能言者"!

刘徽虽然没有推证出球体积公式,但他创用的特殊形式的不可分量方法,成为后来祖冲之父子在球体积问题上取得突破的先导.

刘徽《九章算术注》还有其他许多数学成果,特别是他在《九章算术》"勾股"章之后所加的一整篇文字,作为《九章算术注》第十卷,后来单独刊行,称为《海岛算经》.《海岛算经》发展了古代天文学中的"重差术",成为勾股测量学的典籍.

3.2.2 祖冲之与祖暅

刘徽的数学思想和方法,到南北朝时期(公元 420—589)被祖冲之

和他的儿子祖暅推进和发展了.

祖冲之(公元 429—500) 活跃于南朝宋、齐两代,出生于历法世家,本人做过南徐州(今镇江) 从事史和公府参军,都是地位不高的小官,但他却成为历代为数很少能名列正史的数学家之一.《南齐史》"祖冲之传" 说他"探异今古","革新变旧",并记载了他与守旧派官员戴法兴关于历法问题的一场辩论. 祖冲之在公元 462 年创制了一部历法《大明历》,《大明历》在当时是最先进的历法,却遭到戴法兴等人的竭力反对. 戴法兴是当朝权臣,《宋书》中说凡官员选择任免、生杀赏罚,皇帝都要同他商量,而祖冲之不过居从事史的微职,却敢于在皇帝面前与戴法兴辩论,并直指戴"浮辞虚贬","坚执偏论". 祖冲之还将他反驳戴法兴的议论写成一篇《驳议》,这篇文章后来被收集在《宋书》里,其中提供了有关祖冲之数学贡献的重要线索. 祖冲之在文章一开始说他早年"专攻数术",发现"立圆旧误,张衡述而弗改;汉时斛铭,刘歆诡谬其数". 这里"立圆旧误" 是指《九章算术》中错误的球体积公式;"汉时斛铭" 则是指王莽时代所造铜斛上的数据,系东汉学者刘歆所写,根据这些数据可推出刘歆用的圆周率数值为 $\pi = 3.1547$. 祖冲之批评这两项数学结果是"算氏之剧疵",并说他本人"昔以暇日,撰正众谬,理据炳然". 由此可见,球体积的推导和圆周率的计算是祖冲之本人引以为荣的两大数学成就,只可惜关于这两项工作的原始著作已不能看到. 祖冲之的代表性数学著作是《缀术》.《南齐书 · 祖冲之传》说祖冲之"注九章,造缀术数十篇",但《缀术》也未能留传下来. 我们现在对祖冲之这两项成就的了解,得于其他一些零散的史料.



图 3.11 祖冲之纪念邮票

(一) 圆周率

祖冲之关于圆周率的贡献记载在《隋书》中,《隋书 · 律历志》说:"祖冲之更开密法,以圆径一亿为一丈,圆周盈数三丈一尺四寸一

分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间”.

这就是说，祖冲之算出了圆周率数值的上下限：

$$3.1415926(\text{朒数}) < \pi < 3.1415927(\text{盈数}).$$

史料上没有关于祖冲之推算圆周率“正数”方法的记载. 一般认为这个“正数”范围的获得是沿用了刘徽的割圆术. 事实上，如按刘徽割圆术从正六边形出发连续算到正 24 576 边形时，恰好可以得到祖冲之的结果.

《隋书·律历志》还记载了祖冲之在圆周率计算方面的另一项重要结果：“密率：圆径一百一十三，圆周三百五十五；约率：圆径七，周二十二”. 就是说祖冲之还确定了圆周率的分数形式的近似值：约率$\frac{22}{7}$；密率$\frac{355}{113}$. 祖冲之推算密率的方法同样不得而知. 在现代数论中，如果将圆周率 π 表示成连分数，其渐近分数是：

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103\,993}{33\,102}, \frac{104\,348}{33\,215}, \cdots.$$

第 4 项正是密率，它是分子、分母不超过 1000 的分数中最接近 π 真值的分数. “密率”也称“祖率”. 16 世纪德国人奥托(V. Otto)和荷兰人安托尼兹(A. Anthonisz)曾重新推算出圆周率的这个分数近似值.

(二) 祖氏原理与球体积

曾使刘徽绞尽脑汁的球体积问题，到祖冲之时代终于获得解决. 这一成就被记录在《九章算术》“开立圆术”李淳风注中，李淳风是唐代数学家，他在注文中将球体积的正确解法称为“祖暅之开立圆术”. 祖暅之即祖暅，是祖冲之的儿子，在数学上也有很多创造.

根据李淳风的注，祖暅球体积的推导继承了刘徽的路线，即从计算“牟合方盖”体积来突破. 如图 3.12，取牟合方盖的八分之一，然后考虑它与它的外切正方体所围成的立体，并如图 3.13 Ⅰ 那样将它再剖分成三个小立体，将这三个小立体单画出来分别

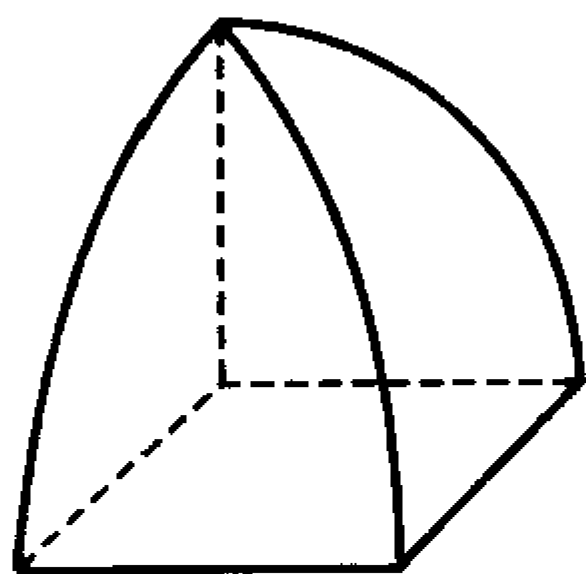


图 3.12

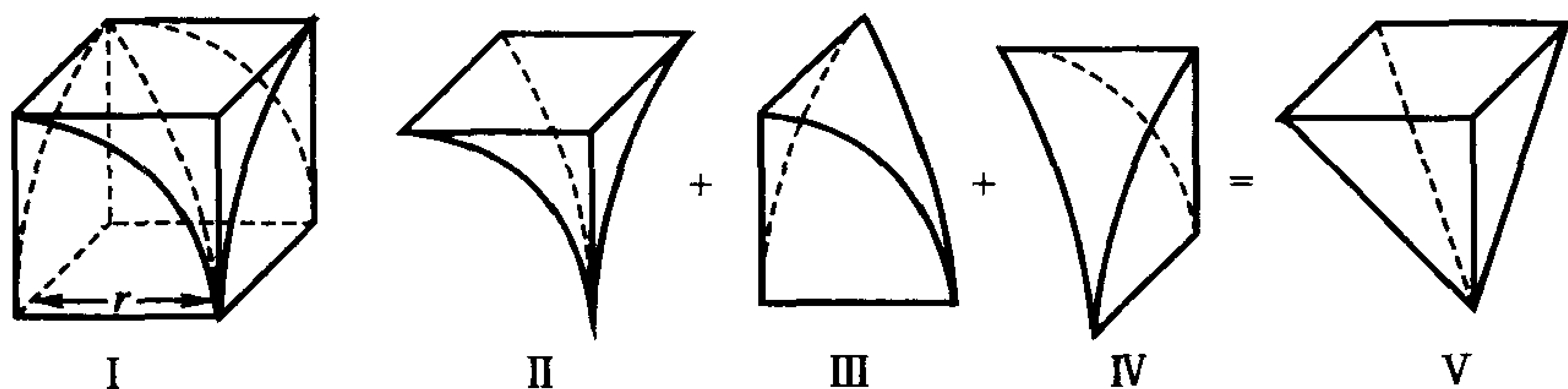


图 3.13

如图 3.13Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ.同时考虑一个以外切正方体上底面为底、以该正方体一边为垂直边的倒方锥(图 3.13Ⅴ).祖暅推证的关键是以下的命题.

命题 Z　倒方锥 Ⅴ 的体积，等于三个小立体 Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 的体积之和，因此也等于从外切正方体中挖去牟合方盖的部分即立体 Ⅰ 的体积：

$$\mathrm{V} = \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} = \mathrm{I}\ .$$

如果证明了命题Z，那么倒方锥 Ⅴ 的体积容易知道是$\frac{1}{3}r^3$(r 是正方体边长，也是内切球半径长).于是牟合方盖八分之一的体积应为$\frac{2}{3}r^3$，整个牟合方盖体积为$8\times\frac{2}{3}r^3$.根据刘徽已经论证过的结果，应有下列关系：

$$V_{\text{球}} : V_{\text{牟合方盖}} = \pi : 4\ ,$$

由此可得

$$V_{\text{球}} = \frac{\pi}{4}V_{\text{牟合方盖}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi D^3,$$

(D 为直径).这是中国数学史上第一次获得的正确的球体积公式.

至于关键命题Z的证明，祖暅考察在高 h 处的水平截面，如图3.14所示容易看出：三个小立体 Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 的截面积 $ASQP$，$CTQR$ 与$BSQT$ 合并在一起应等于正方体截面积 $ABCD$ 与牟合方盖部分的截面积 $PQRD$ 之差，即

$$ASQP + CTQR + BSQT = ABCD - PQRD\ .$$

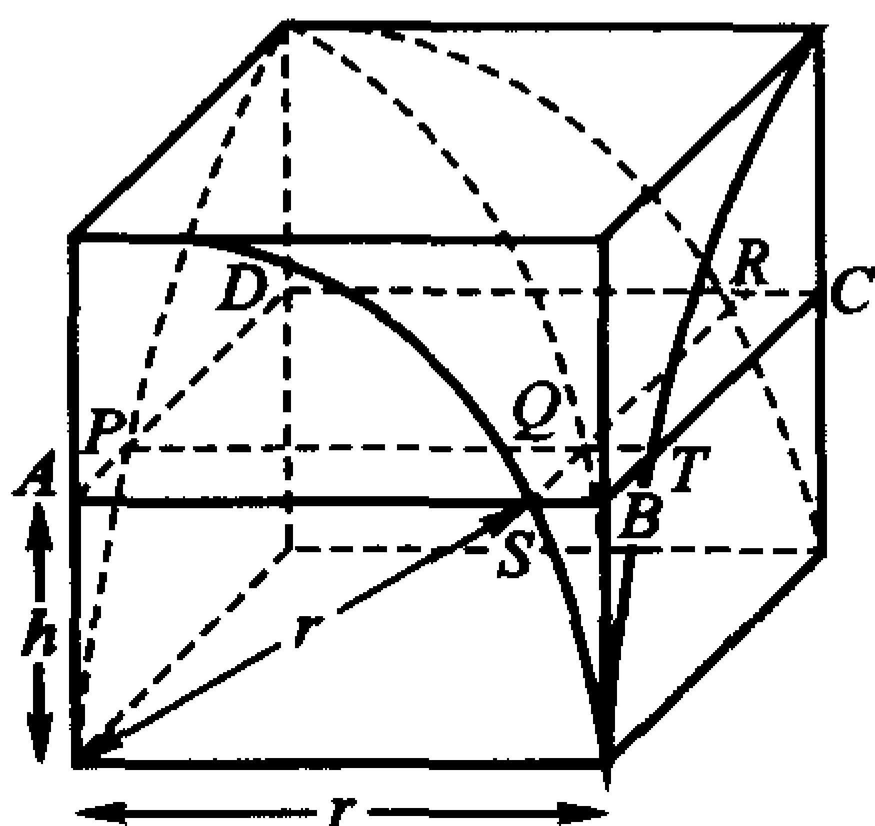


图 3.14

设 $AS = PQ = x$,则有 $ABCD - PQRD = r^2 - x^2$,由勾股定理,$r^2 - x^2 = h^2$,故

$$ASQP + CTQR + BSQT = h^2.$$

但在高 h 处倒方锥 V 的截面积显然也等于 h^2.这就是说,在任一相同的高处,立体 I(注意在方体中已挖去牟合方盖部分)的截面积都与倒方锥 V 的截面相等.

这时祖暅提出了一条原理说:"幂势既同,则积不容异"."幂"指水平截面积,"势"则指高.因此祖暅的原理意思是:两等高立体图形,若在所有等高处的水平截面积相等,则这两个立体体积相等.应用这一原理,命题 Z 的成立不言而喻.

概言之,祖暅推导几何图形体积公式的方法是以下列两条原理为基础:

(1) 出入相补原理;

(2) 祖氏原理:幂势既同,则积不容异.

原理(2),如前所述刘徽已经实际使用过,但祖暅首次明确地将它作为一般原理提出来,并成功地应用于球体积推算.我们称这条原理为"祖氏原理",因为虽然李淳风将球体积公式的推证归功于祖暅,但正如祖冲之《驳议》所说,他在任南徐州从事史时已撰正"立圆旧术",即得出了正确的球体积公式,因此实际情况可能是:祖冲之将他的研究写进了《缀术》,祖暅进一步整理他父亲的遗作并增补、完善,李淳风大概是从经祖暅增补过的《缀术》中引征球体积推导的.

祖氏原理在西方文献中称“卡瓦列里原理”,1635 年意大利数学家卡瓦列里(B. Cavalieri) 独立提出,对微积分的建立有重要影响.

刘徽和祖冲之父子的工作,思想是很深刻的,它们反映了魏晋南北朝时代中国古典数学中出现的论证倾向,以及这种倾向所达到的高度.然而令人迷惑的是,这种倾向随着这一时代的结束,可以说是戛然而止.祖冲之父子的方法都记载在《缀术》中,《缀术》在隋、唐时代曾与《九章算术》一起被列为官学教科书,但《隋书 · 律历志》中已说:“学官莫能究其深奥”了!《缀术》于公元 10 世纪后在中国本土完全失传.中国古典数学的下一个高潮宋元数学,是创造算法的英雄时代.

3.2.3 《算经十书》

大唐盛世,是中国封建社会最繁荣的时代,可是在数学方面,整个唐代却没有产生出能够与其前的魏晋南北朝和其后的宋元时期相媲美的数学大家.隋唐时期中国数学发展的两件大事是数学教育制度的建立和数学典籍的整理,这两件事是相互联系的.

7 世纪初,隋代开始在国子监中设立“算学”,并“置博士、助教、学生等员”,这是中国封建教育中数学专科教育的肇端.唐代不仅沿袭了“算学”制度,而且还在科举考试中开设了数学科目,叫“明算科”,考试及第者也可做官,不过只授予最低官阶.

“算学”制度及明算开科都需要适用的教科书,唐高宗亲自下令对以前的十部数学著作进行注疏整理.受诏负责这项工作的是李淳风(约 604—672),公元 656 年编成以后,成为国学的标准数学教科书,称“十部算经”或“算经十书”.这十部算经分别是:

《周髀算经》,《九章算术》,《海岛算经》,《孙子算经》,《张邱建算经》,《夏候阳算经》,《五曹算经》,《五经算术》,《缀术》,《缉古算经》.

其中《缀术》在唐、宋之交失传以后,宋代刊刻的《算经十书》中便以南北朝时北周人甄鸾所著《数术记遗》来替补.甄鸾也是《五曹算经》、《五经算术》的作者.

除了已介绍过的《周髀算经》、《九章算术》和《缀术》,其他算经如《孙子

算经》、《张邱建算经》和《缉古算经》中也包含有一些重要的数学成就.

(一)《孙子算经》与"物不知数"问题

《孙子算经》作者不详,大约是公元 4 世纪时的作品,全书 3 卷,卷上有今天仅存的中国筹算法则的记载(3.1 中已有介绍).《孙子算经》最著称于世的是卷下的"物不知数"问题:

"今有物不知其数,三三数之剩二,五五数之剩三,七七数之剩二,问物几何?"

这相当于求解一次同余组

$$N \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3) \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5) \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7).$$

《孙子算经》给出的答数是符合条件的最小正数解 $N = 23$,"物不知数"题术文指示了解题方法,列成算式就是:

$$N = 70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 - 2 \times 105 .$$

《孙子算经》还说明对任意余数 R_1, R_2, R_3,只要将算式中的 2,3,2 换成 R_1, R_2, R_3,并调整 105 的系数就行了.这是今天关于一次同余组一般解法的剩余定理的特殊形式.孙子问题引导了宋代秦九韶求解一次同余组的一般算法——"大衍求一术".现代文献中往往把求解一次同余组的剩余定理称为"中国剩余定理",或直称"孙子定理".

(二)《张邱建算经》和"百鸡问题"

《张邱建算经》三卷,据考大约成书于公元 466—485 年间,作者张邱建是北魏时人.《张邱建算经》卷下最后一题通常称"百鸡问题":

"今有鸡翁一,直钱五;鸡母一,直钱三;鸡雏三,直钱一.凡百钱买鸡百只.问鸡翁、母、雏各几何?"

此题相当于解不定方程组:

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 5x + 3y + \dfrac{1}{3}z = 100. \end{cases}$$

张邱建给出

$$x_1 = 4,\ y_1 = 18,\ z_1 = 78;$$

$$x_2 = 8,\ y_2 = 11,\ z_2 = 81;$$

$$x_3 = 12, y_3 = 4, \quad z_3 = 84$$

三组解,它们恰好是所有可能的正整数解.“百鸡问题”术文,则相当于给出整数解

$$x = 4t, y = 25 - 7t, z = 75 + 3t$$

中的参数 t 的三个系数,但叙述过于简括.

“百鸡问题”是世界著名的不定方程问题,13 世纪意大利斐波那契《算经》、15 世纪阿拉伯阿尔·卡西《算术之钥》中均出现有相同的问题.

(三)《缉古算经》与三次方程

《缉古算经》是十部算经中年代最晚的一部,作者王孝通是唐初人.《缉古算经》也是一本实用问题集,用“开带从立方法”解决工程问题,“开带从立方”就是求三次方程正根的数值解法,书中给出了 28 个形如

$$x^3 + px^2 + qx = c$$

的正系数方程及其正有理根,但没有解题方法.

《缉古算经》是世界上最早讨论三次方程组代数解法的著作.高次方程的数值解法,在宋、元时期得到了高度发展.

3.3 宋元数学

唐代以后一些数学著作的失传,大概是五代十国分裂战乱所造成的文化恶果.到了宋代,雕板印书的发达特别是活字印刷的发明,则给数学著作的保存与流传带来了福音.事实上,整个宋元时期(公元 960 – 1368),重新统一了的中国封建社会发生了一系列有利于数学发展的变化.商业的繁荣、手工业的兴盛以及由此引起的技术进步(四大发明中有三项 —— 指南针、火药和活字印刷是在宋代完成并获得广泛应用),给数学的发展带来新的活力.这一时期涌现的优秀数学家中最卓越的代表,如通常称“宋元四大家”的杨辉、秦九韶、李冶、朱世杰等,在世界数学史上占有光辉的地位;而这一时期印刷出版、记载着中国古典数学最高成就的宋元算书,也是世界文化的重要遗产.

3.3.1 从“贾宪三角”到“正负开方”术

宋元数学最突出的成就之一，高次方程数值求解，是《九章算术》开平方和开立方术的继承发展.

(一) 贾宪三角与增乘开方法

宋代以前，大概已有人尝试将《九章算术》中的开方术推广到三次以上情形. 但目前有明确记载保留下来的最早的高次开方法是贾宪创造的“增乘开方法”.

贾宪是北宋人，约公元1050年完成一部叫《黄帝九章算术细草》的著作，原书丢失，但其主要内容被南宋数学家杨辉著《详解九章算法》(1261) 摘录，因能传世. 根据杨辉的摘录，贾宪的高次开方法是以一张称为“开方作法本源”的图为基础. 开方作法本源图(图 3.15，采自《永乐大典》) 现称“贾宪三角”或“杨辉三角”，它实际上是一张二项系数表，即$(x+a)^n(n=0,1,2,\cdots,6)$展开的各项系数. 贾宪将左右斜线上的数字 1 分别称为“积数”和“隅算”，将这两行斜线数字中藏的数字称为“廉”，开几次方，就用相应行的廉；第三行为“二”是开平方的廉；第四行“三、三”是开三次方的廉；第五行“四、六、四”是开四次方的廉，等等. “积”、“隅”、“廉”都是沿用中国古代开方术语.



图 3.15

为了理解贾宪的增乘开方法,我们首先来看一看他是怎样获得“开方作法本源”图中的各廉数的.他在“增乘方求廉法草”中给出的求贾宪三角第七行各数的方法相当于如下程序:

1	$1+5=\underline{6}$					第一位(上廉)
1	$1+4=5$	$5+10=\underline{15}$				第二位(二廉)
1	$1+3=4$	$4+6=10$	$10+10=\underline{20}$			第三位(三廉)
1	$1+2=3$	$3+3=6$	$6+4=10$	$10+5=\underline{15}$		第四位(四廉)
1	$1+1=2$	$2+1=3$	$3+1=4$	$4+1=5$	$5+1=\underline{6}$	第五位(下廉)
1	1	1	1	1	1	隅算

就是说将隅算 1 自下而上增入前位,直到首位为止,就得第一位数字(上廉);求其他各位数字,自下而上重复刚才的程序,每次低一位为止.这是一种随乘随加的过程,所以叫“增乘法”.贾宪发现,这种增乘法不仅可以用来求“开方作法本源”图中的各廉,而且可以被推广用来直接开方,这就是增乘开方法.下面用杨辉《详解九章算法》中记载的一道例题来说明这种方法.该题相当于求

$$x^4 = 1\,336\,336$$

的正根,贾宪的算法相当于以下程序:

① 令 $x = 10x_1$,方程变换为

$$10^4 x_1^4 = 1\,336\,336$$

② 议得首商为 3

③ 令 $x_1 = 3 + x_2$,设方程变换为:

$$a_0x_2^4 + a_1x_2^3 + a_2x_2^2 + a_3x_2 = a_4,$$

其中系数 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 由下列增乘程序来确定:

a_4(实)	$1\,336\,336 - 27 \times 10^4 \times 3 = \underline{526\,336}$			
a_3(立方)	$9 \times 10^4 \times 3 = 27 \times 10^4$	$27 \times 10^4 + 27 \times 10^4 \times 3 = \underline{108 \times 10^4}$		
a_2(上廉)	$3 \times 10^4 \times 3 = 9 \times 10^4$	$9 \times 10^4 + 3 \times 6 \times 10^4 = 27 \times 10^4$	$27 \times 10^4 + 9 \times 10^4 \times 3 = \underline{54 \times 10^4}$	
a_1(下廉)	3×10^4	$3 \times 10^4 + 10^4 \times 3 = 6 \times 10^4$	$6 \times 10^4 + 10^4 \times 3 = 9 \times 10^4$	$9 \times 10^4 + 10^4 \times 3 = \underline{12 \times 10^4}$
a_0(下法)	10^4	10^4	10^4	10^4

即得到减根变换后的方程为

$$10^4 x_2^4 + 12 \times 10^4 x_2^3 + 54 \times 10^4 x_2^2 + 108 \times 10^4 x_2 = 526\,336$$

④ 令 $x_2 = 10^{-1} x_3$，方程变换为

$$x_3^4 + 120 x_3^3 + 5400 x_3^2 + 108\,000 x_3 = 526\,336$$

⑤ 议得次商(第二次商)为 4

⑥ 令 $x_3 = 4 + x_4$，重复以上增乘程序：

a_4	$526\,336 - 131\,584 \times 4 = 0$
a_3	$108\,000 + 5896 \times 4 = 131\,584$
a_2	$5400 + 124 \times 4 = 5896$
a_1	$120 \times 4 \times 1 = 124$
a_0	1

由于常数项 a_4(实) 恰好被减尽，整个计算到此为止，我们得到原开方式的精确根 $x = 34$. 若常数项仍不为零，还可以继续重复增乘程序来求小数后的各位数字.

贾宪增乘开方法，是一个非常有效的和高度机械化的算法，可适用于开任意高次方. 这种随乘随加、能反复迭代计算减根变换方程各项系数的方法，与现代通用的“霍纳算法”(1819) 已基本一致. 而与此方法相联系的“贾宪三角”，在西方文献中则称“帕斯卡三角”(1654).

(二)秦九韶"正负开方术"

贾宪增乘开方术原则上也可以用于求解高次方程,但贾宪本人没有认识到这一点,而只是用它来解决单纯的开方问题.另外直到贾宪时,中国数学家们所处理的方程系数都是正数.12世纪北宋学者刘益首先突破了系数必须为正的限制,在他所著的《议古根源》中,允许方程的系数为负数,并且也不再像以往那样要求首项系数为1.不过《议古根源》没有流传下来,从杨辉《田亩比类乘除捷法》一书摘引的部分内容中,只能找到个别高次(四次)方程的例子.在高次方程数值求解领域的集大成者,是南宋数学家秦九韶.

秦九韶(约公元1202—1261)在他的代表著作《数书九章》中,将增乘开方法推广到了高次方程的一般情形.他将自己的方法称为"正负开方术".正负开方术是求高次代数方程的完整算法.先列出相当于

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

形式的方程,其中方程系数除了常数项 a_n 外都可正可负,常数项则规定总为负,即"实常为负".解方程的方法也是在取得试商 $\bar{x}$ 后通过减根变换 $x = \bar{x} + h$ 将方程变形为新方程

$$a_0'h^n + a_1'h^{n-1} + \cdots + a_{n-1}'h + a_n' = 0.$$

秦九韶"正负开方术"给出了一个机械化的迭代程序来计算新方程的系数 $a_0', a_1', \cdots, a_n'$,这一程序与贾宪增乘程序的主要区别在于:后者在以试商由下而上累乘累加的最后,要将所得结果从常数项中减去;而秦九韶的程序由于规定了"实常为负",整个运算便统一为加法,彻底实现了机械化的随乘随加.另外秦九韶明确他的程序可以用来求解一般的高次方程,他的《数书九章》共包含了21个高次方程,其中次数最高的是10次方程.

秦九韶,字道古,四川安岳人,先后在湖北、安徽、江苏、浙江等地做官,1261年左右被贬至梅州,不久死于任所.他早年在杭州"访习于太史,又尝从隐君子受数学",1247年写成《数书九章》.《数书九章》全书18卷,81题,分九大类(大衍,天时,田域,测望,赋役,钱谷,营建,军旅,市易).其中最重要的成就,除了"正负开方术"外,还有"大衍总数术",

即一次同余式的一般解法.这两项贡献使得宋代算书在中世纪世界数学史上占有突出的地位.

3.3.2 中国剩余定理

秦九韶《数书九章》卷一"大衍总数术",明确地、系统地叙述了求解一次同余方程组的一般方法.所谓"大衍总数术",可以用现代符号来解释如下:

设有一次同余组

$$N \equiv R_i (\bmod\ a_i),\ i = 1,2,\cdots,n.$$

假如诸模数 a_i 两两互素,那么只要求出一组数 k_i,满足:

$$k_i \frac{M}{a_i} \equiv 1 (\bmod\ a_i),\ i = 1,2,\cdots,n,$$

就可以得到适合已给一次同余组的最小正数解为

$$N = \left(\sum_{i=1}^{n} R_i k_i \frac{M}{a_i}\right) - pM,$$

其中 p 为整数,$M = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$.

"大衍总数术"中的关键部分,就是关于数组 $k_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 的计算方法.秦九韶称这些数 k_i 为"乘率",并把自己发现的求乘率的方法称为"大衍求一术".

以任一乘率 k_i 为例.令 $G_i = \dfrac{M}{a_i}$,若 $G_i > a_i$,秦九韶首先用 a_i 除 G_i,求得余数 $g_i < a_i$,那么 $G_i \equiv g_i (\bmod\ a_i)$,于是

$$k_i G_i \equiv k_i g_i (\bmod\ a_i),$$

但因 $k_i G_i \equiv 1 (\bmod\ a_i)$,故问题归结为求 k_i 使适合

$$k_i g_i \equiv 1 (\bmod\ a_i).$$

秦九韶把 a_i 叫"定数",g_i 叫"奇数",他的大衍求一术,实际上相当于把奇数 g_i 与定数a_i 辗转相除,相继得商数 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 和余数$r_1, r_2 \cdots, r_n$,在辗转相除时随即算出下表右边的 c 值:

	商数	余数	c 值
a_i/g_i	q_1	r_1	$c_1 = q_1$
g_i/r_1	q_2	r_2	$c_2 = q_2c_1 + 1$
r_1/r_2	q_3	r_3	$c_3 = q_3c_2 + c_1$
⋮	⋮	⋮	⋮
r_{n-2}/r_{n-1}	q_n	r_n	$c_n = q_nc_{n-1} + c_{n-2}$

秦九韶指出,当 $r_n = 1$ 而 n 是偶数时,最后得到的 c_n 就是所求乘率 k_i;如果 $r_n = 1$ 而 n 是奇数,则将 r_{n-1} 与 r_n 相除,形式上令 $q_{n+1} = r_{n-1} - 1$,那么余数 r_{n+1} 仍是 1,再作 $c_{n+1} = q_{n+1}c_n + c_{n-1}$,这时 $n + 1$ 为偶数,c_{n+1} 就是所求的 k_i. 不论哪种情形,最后一步都出现余数 1,整个计算到此终止,秦九韶因此把他的方法叫做"求一术"(至于"大衍"的意义,秦九韶在《数书九章》序中把它和《周易》"大衍之数"相附会).

在秦九韶那个时代,计算仍然使用算筹. 秦九韶在一个小方盘上,右上布置奇数 g,右下布置定数 a,左上置 1(他叫"天元一"),然后在右行上下交互以少除多,所得商数和左上(或下)相乘并入左下(或上),直到右上方出现 1 为止. 图 3.16 就是秦九韶的一般筹算程序示意,右边是一个数字例子($g = 20, a = 27, k = c_4 = 23$).

可以证明,秦九韶的算法是完全正确且十分严密的. 当然,秦九韶本人并没有给出这样的证明. 到 18、19 世纪,欧拉(1743)和高斯(1801)分别对一次同余组进行了详细研究,重新独立地获得与秦九韶"大衍求一术"相同的定理,并对模数两两互素的情形作出了严格证明. 1876 年德国人马蒂生首先指出秦九韶的方法与高斯算法是一致的,因此关于一次同余组求解的剩余定理常常被称为"中国剩余定理".

秦九韶在《数书九章》中广泛应用大衍总数术来解决历法、工程、赋役和军旅等实际问题,在这些问题中,模数 a_i 并不总是两两互素的整数. 秦九韶区分了"元数"(整数)、"收数"(小数)、"通数"(分数)等不同情形. 大衍总数术将收数和通数化成元数情形,而对于元数非两两互素的情形,则给出了可靠的计算程序把问题化归为两两互素的情形. 这

天元1	奇g_1 定a_1	1,20 27
1, $c_1=q_1$,	g_1 r_1 (q_1)	1,20 1,7
 $c_2=c_1q_2+1$, c_1,	(q_2) r_2 r_1	 3, 6 1, 7
⋮		
c_{n-2}, $c_{n-1}=c_{n-2}q_{n-1}+c_{n-3}$,	r_{n-2} r_{n-1} (q_{n-1})	3, 6 4, 1
 $c_n=c_{n-1}q_n+c_{n-2}$, c_{n-1},	(q_n) 1 r_{n-1}	 23,1 4, 1

图 3.16

是历史上第一次对模数非两两互素的同余式组的处理.

秦九韶的大衍总数术,是《孙子算经》中"物不知数"题算法的推广.从"孙子问题"到"大衍总数术"关于一次同余式求解的研究,形成了中国古典数学中饶有特色的部分.这方面的研究,可能是受到了天文历法问题的推动.例如中国古代制定历法时需要确定"历元"(一部历法的起算点),历元的计算本质上是一个一次同余组问题.中国古典数学的发展与天文历法有特殊的联系,另一个突出的例子是内插法的发展.

3.3.3 内插法与垛积术

古代天算家由于编制历法而需要确定日月五星等天体的视运动,当他们观察出天体运动的不均匀性时,内插法便应运产生.早在东汉时期,刘洪《乾象历》就使用了一次内插公式来计算月行度数.这当然是

比较粗糙的近似．公元600年刘焯在《皇极历》中使用了二次内插公式来推算日月五星的经行度数．公元727年，僧一行又在他的《大衍历》中将刘焯的公式推广到自变量不等间距的情形．但由于天体运动的加速度也不均匀，二次内插仍不够精密．随着历法的进步，对数学工具也提出了更高的要求．到了宋元时代，便出现了高次内插法．

首先是郭守敬、王恂等在著名的《授时历》(1280) 中，认定天体运行的距离是时间的三次函数

$$f(t) = d + at + bt^2 + ct^3.$$

不过郭守敬等并没有明确给出三次内插公式，而是用差分表来解决问题，他们称自己的方法为“招差”，因此一般中算史文献上都称内插法为“招差术”．

最先获得一般高次内插公式的数学家是朱世杰．

朱世杰(公元1300前后)，自号松庭，寓居燕山(今北京附近)，是一位平民数学家和数学教育家，“以数学名家周游湖海二十余年”，“踵门而学者云集”(莫若、祖颐：《四元玉鉴》后序)．朱世杰的代表著作有《算学启蒙》(1299) 和《四元玉鉴》(1303)．《算学启蒙》是一部通俗数学名著，曾流传海外，影响了日本与朝鲜数学的发展．《四元玉鉴》则是中国宋元数学高峰的又一个标志，其中最突出的数学创造有“招差术”(即高次内插法)，“垛积术”(高阶等差级数求和) 以及“四元术”(多元高次联立方程组与消元解法) 等．

《四元玉鉴》卷中“如象招数” 总共5个问题，都与招差法有关，其中最典型的第5问：“以立方招兵，初招方面三尺，次招方面转多一尺，……今招十五日……，问招兵……几何？”设日数为 n，则这问题是说：每日按 $(n+2)^3$ 数招兵，第15日共招兵多少？若用 $f(n)$ 表示至第 n 日共招兵人数，朱世杰对这问题的解答相当于给出了如下公式：

$$f(n) = n\Delta + \frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2 + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta^3 + \frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^4,$$

其中 $\Delta = 27, \Delta^2 = 37, \Delta^3 = 24, \Delta^4 = 6$ 分别称为“上差”、“二差”、“三差”

和“下差”：

日数	每日招兵数			
1	$3^3=27(\Delta_1)$			
		$37(\Delta_2)$		
2	$4^3=64$		$24(\Delta_3)$	
		61		$6(\Delta_4)$
3	$5^3=125$		30	
		91		6
4	$6^3=216$		36	
		127		…
5	$7^3=343$		…	
		…		
…	…			

这是一个四次招差公式,在形式上已与现在通用的牛顿 - 格列高里(J · Gregory) 公式相一致. 朱世杰是怎样得出这一公式的呢?在“如象招数”第5问术文中有明确的说明,他是利用了高阶等差数列求和的公式,这就涉及到宋元时期的另一项数学成就——“垛积术”.

高阶等差数列的研究在中国始于北宋的沈括(1031—1095). 沈括《梦溪笔谈》卷十八“隙积术”,就是关于长方台形垛积的求和公式. 一个上底宽是 a 个物体、长是 b 个物体;下底宽是 c 个物体、长是 d 个物体;高 n 层的长方台形垛积(图 3.17),要求物体个数的总和 S. 沈括发现这个和数比上底宽 a、长 b;下底宽 c,长 d,高 n 的长方棱台的体积

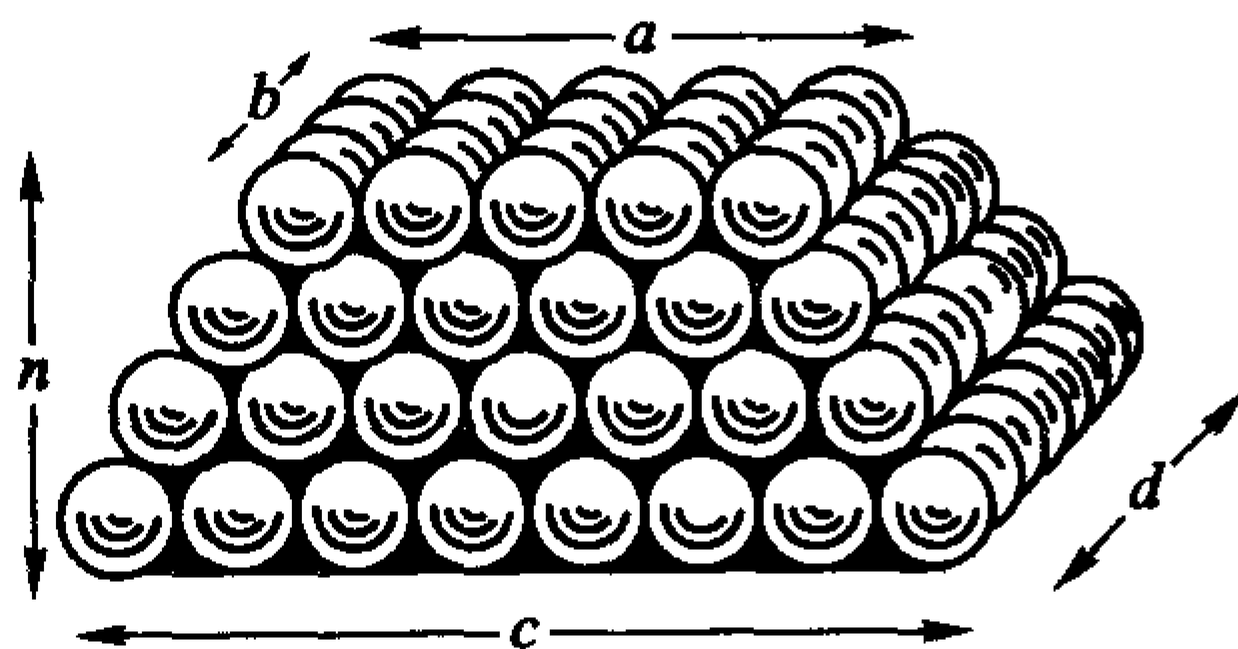


图 3.17

多出$\frac{n}{6}(c-a)$,即

$$S = ab + (a+1)(b+1) + \cdots + cd$$
$$= \frac{n}{6}[(2b+d)a + (2d+b)c] + \frac{n}{6}(c-a).$$

沈括没有解释其公式的来源.沈括之后,南宋的杨辉在《详解九章算法》中明确得到了一些高阶等差数列的求和公式,但在这方面获得系统和普遍结果的也是朱世杰.

朱世杰在《四元玉鉴》中给出了一系列所谓"三角垛"公式:

茭草垛 $\sum_{1}^{n} r = 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2!}n(n+1);$

三角垛 $\sum_{1}^{n} \frac{1}{2!}r(r+1) = 1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{3!}n(n+1)(n+2);$

撒星形垛 $\sum_{1}^{n} \frac{1}{3!}r(r+1)(r+2) = 1+4+10+\cdots = \frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3);$

…

这样,朱世杰相继以前一个级数的和作为新级数的一般项,就得到了 p 阶等差级数求和的一般公式:

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)$$
$$= \frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p).$$

朱世杰在垛积术方面的功绩,不仅仅是获得了这样的一般公式,而且还在于:

(1) 他指出了三角垛公式与贾宪三角之间的关系:这些公式左侧求和各项依次是贾宪三角中第 p 条斜线上的前 n 项数字,而右侧的"积"则刚好等于 $p+1$ 条斜线上第 n 项数字.《四元玉鉴》中载有一张增广了的贾宪三角图,他命之为"古法七乘方图"(图 3.18).他极有可能是通过这张图发现三角垛公式的.

(2) 他又指出了三角垛公式与招差术之间的联系:他的招差公式中各项差分的系数恰好是相应各三角垛的"积",因此,虽然朱世杰在《四元玉鉴》中只写出了四次招差公式,但他完全可以根据垛积术写出

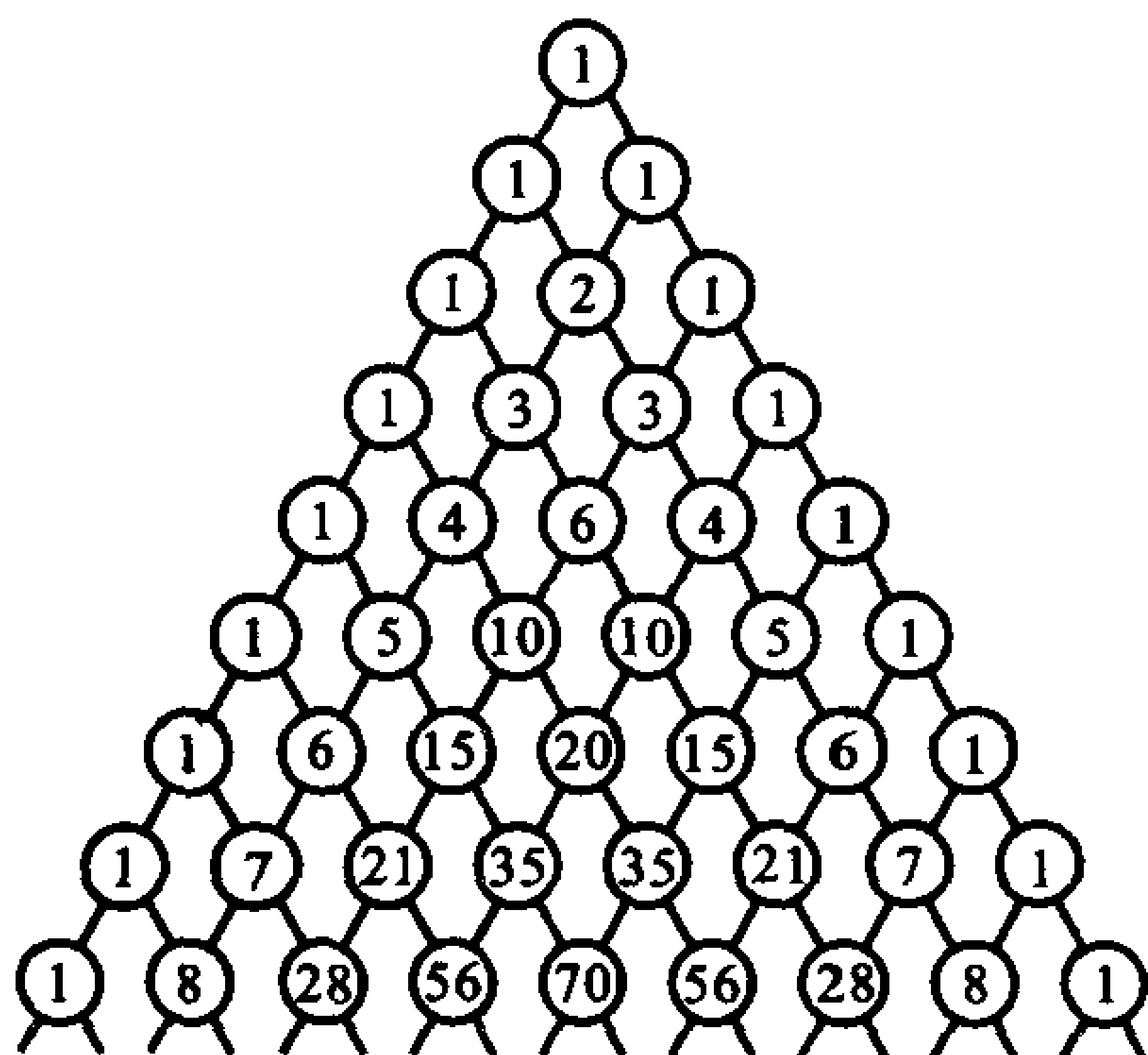


图 3.18

任意高次的招差公式来.

《四元玉鉴》中还包括有其他一些更复杂的垛积公式.

3.3.4 "天元术"与"四元术"

宋元数学发展中一个最深刻的动向是代数符号化的尝试,这就是"天元术"和"四元术"的发明.天元术和四元术都是用专门的记号来表示未知数,从而列方程、解方程的方法,它们是代数学的重要进步.

(一) 天元术

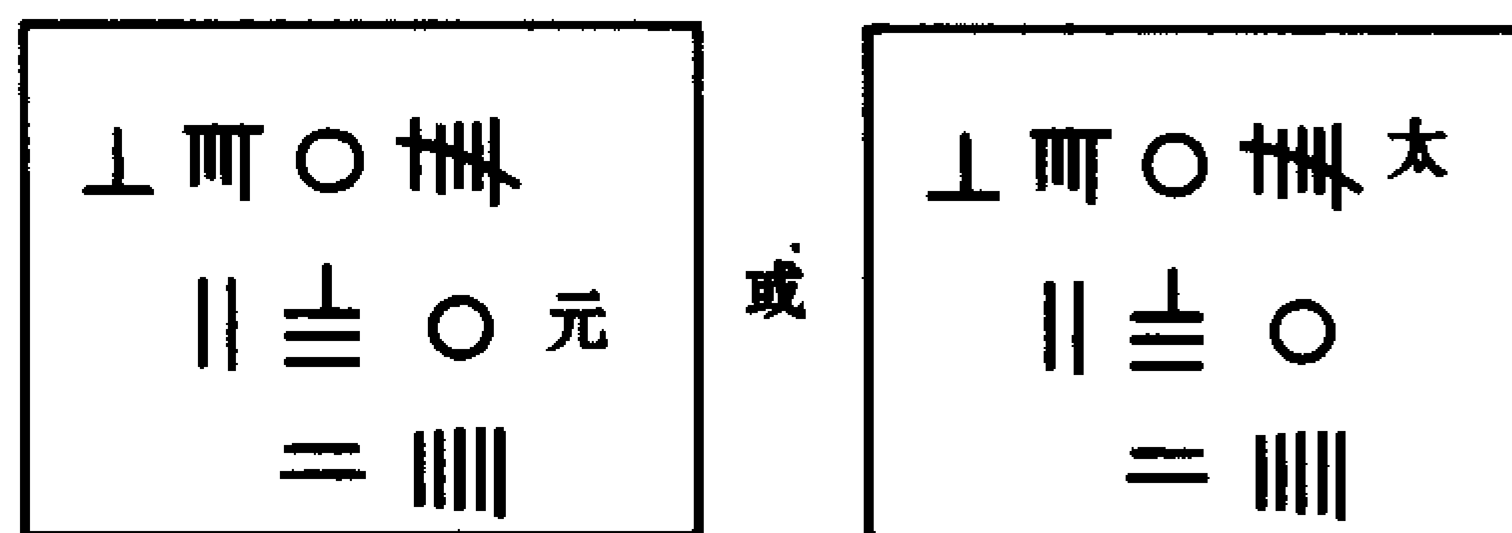
宋元时期高次方程数值求解技术的发展,必然引起对列方程方法的需求."天元术"就是在这样的情况下产生的.在传世的宋元数学著作中,首先系统阐述天元术的是李冶(1192—1279)的《测圆海镜》(1248)和《益古演段》(1259)两部著作.

用天元术列方程的方法,与现代代数中的列方程法相类似.首先"立天元一为某某",这相当于"设 x 为某某","天元一"就表示未知数,在筹算盘上列天元式,先确定未知数一次项系数的位置,在其旁置一"元"字,其余各项按未知数幂次相对于一次项上下递增或递减排列.有时李冶则在常数项旁置一"太"字来代替在一次项旁置"元".如方程

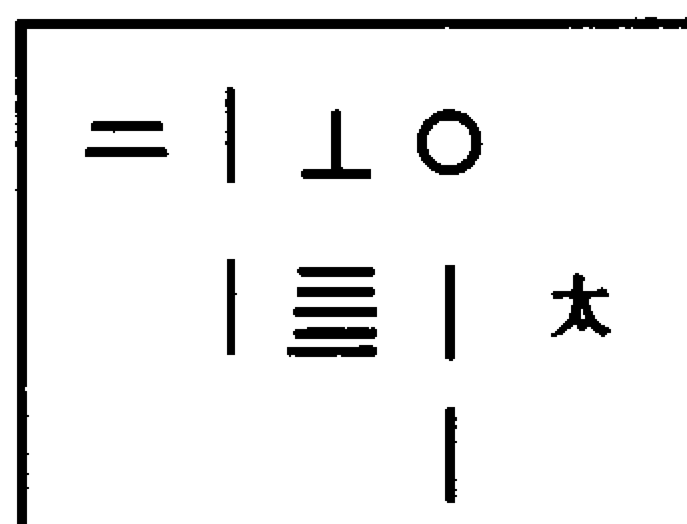
有负系数,就在这系数的个位筹码上加一斜划.例如今天的方程式

$$25x^2 + 280x - 6905 = 0,$$

用天元式表示就是



而天元式



就表示方程 $x + 151 + 2160x^{-1} = 0$.李冶列出方程后,就用增乘开方法来解方程,但他改变了秦九韶"实常为负"的规定.

(二)四元术

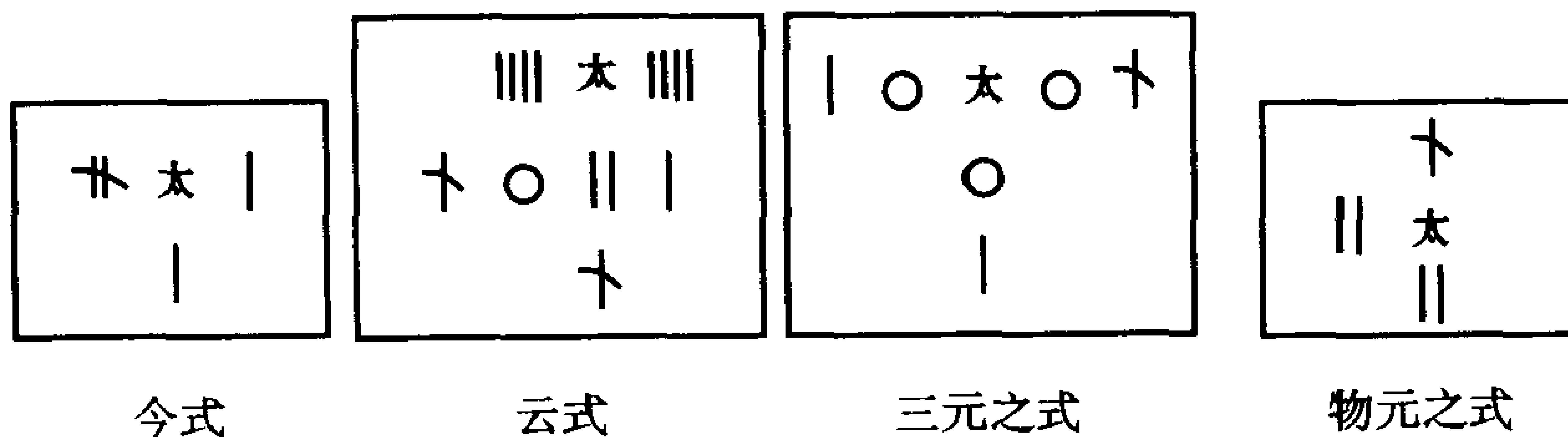
在李冶之后,天元术被朱世杰从一个未知数推广到二元、三元及四元高次联立方程组,这就是"四元术".

朱世杰《四元玉鉴》中详细记载了这种列多元高次方程组的方法.首先令常数项(太)居中,然后"立天元一于下,地元一于左,人元一于右,物元一于上".这就是说,"四元术"以"天"、"地"、"人"、"物"来表示四个不同的未知数.如果用今天的 x,y,z,w 来代替"天"、"地"、"人"、"物",那么朱世杰列高次多元方程组的方法就如图 3.19 所示.在筹算盘上列四元式,通常是将相应的各项系数记在图中相应的位置上,不相邻二未知数的乘积所构成的各项(如 yz,xw),则记入图中相应的间隙位置.以《四元玉鉴》卷首"假令四草"第 4 题为例,该题要求一勾股形中由勾、股、弦数组成的某表达式数("开数").朱世杰的做法是"立天元

y^3w^3	y^2w^3	yw^3	w^3	w^3z	w^3z^2	w^3z^3
y^3w^2	y^2w^2	yw^2	w^2	w^2z	w^2z^2	w^2z^3
y^3w	y^2w	yw	w	wz	wz^2	wz^3
				yz		
y^3	y^2	y	太	z	z^2	z^3
		xw				
xy^3	xy^2	xy	x	xz	xz^2	xz^3
x^2y^3	x^2y^2	x^2y	x^2	x^2z	x^2z^2	x^2z^3
x^3y^3	x^3y^2	x^3y	x^3	x^3z	x^3z^2	x^3z^3

图 3.19

一为勾,地元一为股,人元一为弦,物元一为开数",根据题意列出四个方程:



今式　　云式　　三元之式　　物元之式

用今天的符号表示,就是设 x 为勾;y 为股;z 为弦;w 为"开数",得到的方程"今式"、"云式"、"三元之式" 和"物元之式" 则相当于

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -x^2+2x-xy^2+xz+4y+4z=0 \\ x^2+y^2-z^2=0 \\ 2x+2y-w=0. \end{cases}$$

列出方程后,朱世杰便用消元法解方程,求出开数为 14. 朱世杰在《四元玉鉴》中使用了"剔消"、"易位"、"互隐通分"、"内外行乘积" 等多种消元手段,表现了熟练的消元技巧.

《四元玉鉴》可以说是宋元数学的绝唱. 元末以后，中国传统数学骤转衰落. 整个明清两代(1368—1911)，不仅未再产生出能与《数书九章》、《四元玉鉴》相媲美的数学杰作，而且在清中叶乾嘉学派重新发掘研究以前，"天元术"、"四元术" 这样一些宋元数学的精粹，竟长期失传，无人通晓. 明初开始长达三百余年的时期内，除了珠算的发展及与之相关的著作(如程大位《算法统宗》，1592) 的出现，中国传统数学研究不仅没有新的创造，反而倒退了.

中国传统数学自元末以后逐渐衰微的原因是多方面的. 皇朝更迭的漫长的封建社会，在晚期表现出日趋严重的停滞性与腐朽性，数学发展缺乏社会动力和思想刺激. 元代以后，科举考试制度中的《明算科》完全废除，唯以八股取士，数学家社会地位低下，研究数学者没有出路，自由探讨受到束缚甚至遭禁锢.

同时，中国传统数学本身也存在着弱点. 筹算系统使用的十进位值记数制是对世界文明的一大贡献，但筹算本身却有很大的局限性. 在筹算框架内发展起来的半符号代数"天元术" 与"四元术"，就不能突破筹算的限制演进为彻底的符号代数. 筹式方程运算不仅笨拙累赘，而且对有五个以上未知量的方程组无能为力. 另一方面，算法创造是数学进步的必要因素，但缺乏演绎论证的算法倾向与缺乏算法创造的演绎倾向同样难以升华为现代数学. 而无论是笔算数学还是演绎几何，在中国的传播都由于"天朝帝国" 的妄大、自守而显得困难和缓慢. 16、17 世纪，当近代数学在欧洲蓬勃兴起以后，中国数学就更明显地落后了.

印度与阿拉伯的数学

4

4.1 印度数学

1921—1922年间,印度河流域莫亨佐·达罗、哈拉帕等古代城市遗址的考古挖掘,揭示了一个悠久的文明,史称"哈拉帕文化"或"印度河流域文化".这一文明的创造者是印度土著居民达罗毗荼人,其历史可以追溯到公元前3000年左右.大约到了公元前2000年纪中叶,操印欧语的游牧民族雅利安人入侵印度,征服了达罗毗荼人,印度土著文化从此衰微不振.

印度历史上曾出现过强盛独立的王朝,如孔雀王朝(公元前324—前185)、笈多王朝(320—540),但总体而言,整个古代与中世纪,富庶的南亚次大陆几乎不断地处于外族的侵扰之下.公元前6世纪,波斯帝国将印度变为它的辖区;公元前327年,亚历山大大帝赶走了波斯人,却在这里建立了马其顿人的莫尔雅帝国;大月氏人又曾将印度并入贵霜帝国的版图(1世纪—3世纪).公元5世纪以后,印度更是先后遭受匈奴人、阿拉伯人、突厥人和蒙古人的侵占.这种多民族的交替入侵,使古代的印度文化包括印度数学不可避免地呈现出多元化的复杂背景.

如果说希腊数学与其哲学密切相关,那么古代印度数学则更多地受到其宗教的影响.雅利安人建立的婆罗门教(公元4世纪后改革为印度教),以及稍后(公元前6世纪)兴起的佛教、耆那教等,形成了古代印

度数学发展的浓厚的宗教氛围.

印度数学的发展可以划分为3个重要时期,首先是雅利安人入侵以前的达罗毗荼人时期(约公元前3000—前1400),史称河谷文化;随后是吠陀时期(约公元前10世纪—前3世纪);其次是悉檀多时期(5世纪—12世纪).

4.1.1　古代《绳法经》

由于达罗毗荼人的象形文字至今不能解读,所以对这一时期印度数学的实际情况了解得很少.印度数学最早有可考文字记录的是吠陀时代,其数学材料混杂在婆罗门教的经典《吠陀》当中,年代很不确定.吠陀即梵文veda,原意为知识、光明,《吠陀》内容包括对诸神的颂歌、巫术的咒语和祭祀的法规等,这些材料最初由祭司们口头传诵,后来记录在棕榈叶或树皮上.不同流派的《吠陀》大都失传,目前流传下来仅有7种,这些《吠陀》中关于庙宇、祭坛的设计与测量的部分《测绳的法规》(Sulva sūtrus),即《绳法经》,大约为公元前8世纪至公元前2世纪的作品.其中有一些几何内容和建筑中的代数计算问题.如勾股定理、矩形对角线的性质、相似直线形的性质,以及一些作图法等,在作一个正方形与已知圆等积的问题中,使用了圆周率的以下近似值:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 20 \cdot 6} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 = 3.0883,$$

此外还用到$\pi = 3.004$和$\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3.160\ 49$的近似值.在关于正方形祭坛的计算中取

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = 1.414\ 215\ 686.$$

由几何计算导致了一些求解一、二次代数方程问题,印度人用算术方法给出了求解公式.

耆那教的经典由宗教原理、数学原理、算术和天文等几部分构成,流传下来的原始经典较少,不过有一些公元前5世纪—2世纪的注释.其中出现了许多计算公式,如圆周长$C = \sqrt{10}r$,弧长$l = \sqrt{a^2 + 6h^2}$等.

4.1.2 “巴克沙利手稿”与零号

关于公元前 2 世纪至公元后 3 世纪的印度数学，可参考资料也很少，所幸于 1881 年在今巴基斯坦西北地区一座叫巴克沙利(Bakhashali)的村庄，发现了这一时期的书写在桦树皮上的所谓“巴克沙利手稿”. 其数学内容十分丰富，涉及到分数、平方根、数列、收支与利润计算、比例算法、级数求和、代数方程等，其代数方程包括一次方程、联立方程组、二次方程. 特别值得注意的是手稿中使用了一些数学符号，如减号，状如今天的加号，“12 − 7”记成“12　7 +”. 巴克沙利手稿中出现了完整的十进制数码，其中用点表示 0：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

表示零的点号后来逐渐演变为圆圈，即现在通用的“0”号，这一过程至迟于公元 9 世纪已完成. 有一块公元 876 年的石碑，因存于印度中央邦西北地区的瓜廖尔(Gwalior)城而以瓜廖尔石碑著称，上面已记有明白无疑的数“0”. 瓜廖尔数系为：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

用圆圈符号“0”表示零，可以说是印度数学的一大发明. 在数学上，“0”的意义是多方面的，它既表示“无”的概念，又表示位值记数中的空位，而且是数域中的一个基本元素，可以与其他数一起运算. “0”作为记数法中的空位，在位值制记数的文明中不可缺少，只不过不同的文明采取了不同的表示方法. 早期巴比伦楔形文书和宋元以前的中国筹算记数法，都是留出空位而没有符号. 巴比伦人后来(公元前 3 世纪)引进了一个专门记号( )表示空位，玛雅 20 进制记数中也有表示空位的零号(形状像一只贝壳或眼睛： ， 等有多种写法)，但无论是巴比伦还是玛雅的零号都仅仅用来表示空位而没有被看作是一个独立的数. 印度人起初也是用空位表示零，后记成点号，最后发展为圈号. 到公元 11 世纪，包括有零号的印度数码和十进位值记数法臻于成熟，特别

是印度人不仅把"0"看作记数法中的空位,而且也视其为可施行运算的一个独立的数.婆罗摩笈多、马哈维拉和婆什迦罗的著作中都有关于零的运算法则的记述.

印度数码在公元8世纪传入阿拉伯国家,后又通过阿拉伯人传至欧洲.零号的传播则要晚,不过至迟在13世纪初,斐波那契《算经》(5.1)中已有包括零号在内的完整印度数码的介绍.印度数码和十进位值制记数法被欧洲人普遍接受之后,在欧洲近代科学的进步中扮演了重要的角色.当然关于印度零号的来源,学术界尚在探讨,但无论如何,零号的发明是对世界文明的杰出贡献.

4.1.3 "悉檀多"时期的印度数学

悉檀多(梵文 siddhanta,原为佛教因明术语,可意译为"宗",或"体系")时代是印度数学的繁荣鼎盛时期,其数学内容主要是算术与代数,出现了一些著名的数学家,如阿耶波多(Aryabhata Ⅰ,476— 约550)、婆罗摩笈多(Brahmagupta,598—665)、马哈维拉(Mahavira,9世纪)和婆什迦罗(Bhaskara Ⅱ,1114— 约1185)等.

(一) 阿耶波多

阿耶波多是现今所知有确切生年的最早的印度数学家,他只有一本天文数学著作《阿耶波多历数书》(499)传世.该书最突出的地方在于对希腊三角学的改进和一次不定方程的解法.阿耶波多把半弦与全

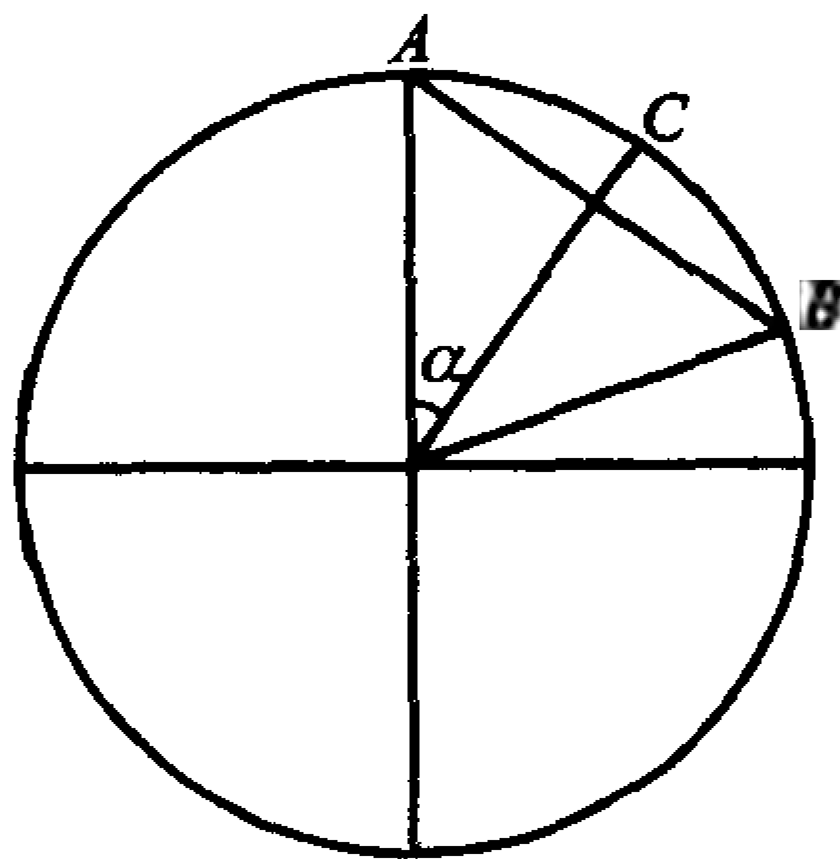


图 4.1

弦所对弧的一半相对应(见图 4.1),成为今天的习惯,同时他以半径的 $\frac{1}{3438}$ 作为度量弧的单位,实际是弧度制度量的开始.他还给出了第一象限内间隔为3°45′的正弦差值表.印度第一个正弦表是在年代距阿耶波多不远的天文著作《苏利耶历数全书》(Sūrya Siddhanta,佚名,约5世纪)中出现的.

阿耶波多最大贡献是建立了丢番图方程求解的所谓"库塔卡"(kuttaka,原意"粉碎")方法,采用辗转相除法的演算程序,接近于连分数算法.为求方程 $ax = by + m$ 的整数解,首先对 a,b 使用辗转相除法得到系列商 $\{q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n\}$,以及相应的余数系列:$\{r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n = 0\}$,依法则:

$$\begin{cases} c_1 = q_1 \\ e_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} c_2 = q_1 q_2 + 1 \\ e_2 = q_2 \end{cases}, \begin{cases} c_i = c_{i-1} q_i + c_{i-2} \\ e_i = e_{i-1} q_i + e_{i-2} \end{cases} (i > 2)$$

计算,得到 $\frac{a}{b}$ 的渐近分数序列:

$$\left\{ \frac{c_1}{e_1}, \quad \frac{c_2}{e_2}, \quad \frac{c_3}{e_3}, \quad \cdots, \quad \frac{c_n}{e_n} \right\},$$

有

$$\frac{c_n}{e_n} = \frac{a/d}{b/d}, \ c_{n-1} b - e_{n-1} a = 1,$$

于是

$$\begin{cases} x = c_{n-1} m \\ y = e_{n-1} m \end{cases} \quad \text{是不定方程的特解.}$$

(二) 婆罗摩笈多

婆罗摩笈多的两部天文著作《婆罗摩修正体系》(628)和《肯德卡迪亚格》(约665),都含有大量的数学内容,其代数成就十分可贵.他已明确把0作为一个数来处理,《婆罗摩修正体系》中比较完整地叙述了零的运算法则:"负数减去零是负数;正数减去零是正数;零减去零什么也没有;零乘负数、正数或零都是零.……零除以零是空无一物,正数或负数除以零是一个以零为分母的分数".最后这句话是印度人提出以零为除数问题的最早记录.婆罗摩笈多将零作为一个数进行运算的思

想,被后来的印度数学家所追随,9 世纪马哈维拉和施里德哈勒都接受了这一传统.婆罗摩笈多对负数也有明确的认识,提出了正负数的乘除法则.他曾利用色彩名称来作为未知数的符号,并给出二次方程的求根公式.婆罗摩笈多最突出的贡献是给出今天所谓佩尔(Pell) 方程 $ax^2+1=y^2$(a 是非平方数)的一种特殊解法,名为"瓦格布拉蒂".他的方法首先选择适当的整数 k 与k',分别找出$ax^2+k=y^2$ 和 $ax^2+k'=y^2$ 的解(α,β) 与(α',β'),再做所谓"瑟马萨"(samāsa) 的组合,得到:
$\begin{cases} x=\alpha\beta'\pm\alpha'\beta \\ y=\beta\beta'\pm a\alpha\alpha' \end{cases}$,为 $ax^2+kk'=y^2$ 的解.

取 $k=k'$,若 $a\alpha^2+k=\beta^2$,则$\begin{cases} x=2\alpha\beta \\ y=\beta^2+a\alpha^2 \end{cases}$是 $ax^2+k^2=y^2$ 的解.于是 $a\left(\frac{2\alpha\beta}{k}\right)^2+1=\left(\frac{\beta^2+a\alpha^2}{k}\right)^2$,这样就得到 $ax^2+1=y^2$ 的解:

$$x=\frac{2\alpha\beta}{k},y=\frac{\beta^2+a\alpha^2}{k}.$$

婆罗摩笈多进一步指出,只要在 $k=\pm1,\pm2,\pm4$ 的条件下,求得 $ax^2+k=y^2$ 的一组解(α,β),就可得出 $ax^2+1=y^2$ 的无穷组解.

婆罗摩笈多在《肯德卡迪亚格》中利用二次插值法构造了间隔为 15° 的正弦函数表,给出下面的插值公式:

$$\sin(\alpha+xh)=\sin\alpha+\frac{x}{2}[\Delta\sin\alpha+\Delta\sin(\alpha-h)]$$
$$+\frac{x^2}{2}\Delta^2\sin(\alpha-h)$$

(其中 $h=15°$,$x\leq1$,$\Delta\sin(\alpha-h)$ 与 $\Delta^2\sin(\alpha-h)$ 分别表示一、二阶差分).

婆罗摩笈多正弦差分表

角度	正弦线	一阶差分	二阶差分
0	0	39	-3
15	39	36	-5
30	75	31	-7
45	106	24	-9
60	130	15	-10
75	145	5	
90	150		

婆罗摩笈多在几何方面的杰出成果是获得了边长为 a,b,c,d 的四边形的面积公式：

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\quad [p=(a+b+c+d)/2].$$

实际上，这一公式仅适合于圆内接四边形，婆罗摩笈多并未认识到这一点．后来马哈维拉由这一公式出发，将三角形视为有一边为 0 的四边形，从而获得海伦公式．12 世纪的婆什迦罗曾经对婆罗摩笈多的四边形公式提出过质疑．

(三) 马哈维拉

7 世纪以后，印度数学出现了沉寂，到 9 世纪才又呈现出繁荣．如果说 7 世纪以前印度的数学成就总是与天文学交织在一起，那么 9 世纪以后发生了改变．耆那教徒马哈维拉的《计算方法纲要》(The Ganita-Sara-Sangraha) 可以说是一部系统的数学专著，全书有 9 个部分：(1) 算术术语，(2) 算术运算，(3) 分数运算，(4) 各种计算问题，(5) 三率法(即比例) 问题，(6) 混合运算，(7) 面积计算，(8) 土方工程计算，(9) 测影计算．基本是对以往数学内容的总结和推广，书中给出了一般性的组合数 C_n^r 公式，而且给出椭圆周长近似公式：$C=\sqrt{24b^2+16a^2}$．因其有很多问题和方法与中国《九章算术》相同或相近，从而有人认为他受到过《九章算术》或中国其他算书的影响．

与马哈维拉同时代的施里德哈勒(Sridhara，9 世纪) 撰写的《计算概要》(Ganita-Sara) 也是一本日用数学著作，内容基本与马哈维拉的《计算方法纲要》一致．

(四) 婆什迦罗

婆什迦罗是印度古代和中世纪最伟大的数学家和天文学家，长期在乌贾因负责天文台工作．他有两本代表印度古代数学最高水平的著作《莉拉沃蒂》(Līlāvatī) 和《算法本源》，天文著作有《天球》和《天文系统之冠》．关于《莉拉沃蒂》书名，有一个美丽动人的传说：莉拉沃蒂是婆什迦罗女儿的名字(Līlāvatī，原意是“美丽”)，占星家预言她终身不能结婚．也是占星家的婆什迦罗为女儿预占吉日，他把一个底部有孔的

杯子放入水中，让水从孔中慢慢渗入．杯子沉没之时，也就是他女儿的吉日来临之际．女儿带着好奇观看这只待沉的杯子，不想颈项上一颗珍珠落入杯中，正好堵塞了漏水的小孔，杯子停止了继续下沉，这样注定莉拉沃蒂永不能出嫁．婆什迦罗为了安慰女儿，把他所写的算书以她的名字命名，以使她的名字随同这本书一起流芳百世．该书后来在莫卧儿帝国的帝王阿克巴(Akbar,1556—1605 在位)的授意下，由菲济(Fyzi)译成波斯文．这个传说来源于菲济的记载．

《莉拉沃蒂》共有13章：第1章给出算学中的名词术语；第2章是关于整数、分数的运算，包括加、减、乘、除、平方、开平方、立方、开立方等；第3章论各种计算法则和技巧；第4章关于利率等方面的应用题；第5章数列计算问题，主要是等差数列和等比数列；第6章关于平面图形的度量计算；第7至10章关于立体几何的度量计算；第11章为测量问题；第12章是代数问题，包括不定方程；第13章是一些组合问题．该书中很多数学问题是用歌谣的形式给出．《算法本源》则主要是算术和代数著作，其中包括有零的运算法则的完整论述，特别是对零作除数的问题给出了有意义的解释，认为分母为零的分数“表示一个无穷大量”．

婆什迦罗和其他印度数学家一样，对不定方程持有特别的兴趣，除对“库塔卡”问题外，他把婆罗摩笈多关于佩尔方程的特殊解法改造成一般性的解法．对于 $ax^2+1=y^2$，婆什迦罗首先选择适当的整数 k，找出 $ax^2+k=y^2$ 的一组特解 (α,β)，即 $a\alpha^2+k=\beta^2$，另外再找一个整数 m，使 $(1,m)$ 是 $ax^2+(m^2-a)=y^2$ 的一组特解，使用“瑟马萨”组合，得到 $\begin{cases} x=\alpha m+\beta \\ y=\beta m+a\alpha \end{cases}$ 满足 $ax^2+k(m^2-a)=y^2$，即

$$a\left(\frac{\alpha m+\beta}{k}\right)^2+\frac{m^2-a}{k}=\left(\frac{\beta m+a\alpha}{k}\right)^2,$$

最后根据“库塔卡”方法，可以找到 m 使 $k \mid m\alpha+\beta$，并且使 $|m^2-a|$ 最小．计算

$$\frac{m\alpha+\beta}{k}=\alpha_1,\quad \frac{m^2-a}{k}=k_1,\quad \frac{m\beta+a\alpha}{k}=\beta_1,$$

则 (α_1,β_1) 是方程 $ax^2+k_1=y^2$ 的解．用 α_1,β_1,k_1 代替 α,β,k，重复

做上面的演算,若干次后就得到 $ax^2+p=y^2$ 的特解(其中 $p=\pm 1, \pm 2, \pm 4$),再根据婆罗摩笈多的方法得到 $ax^2+1=y^2$ 的无穷个解.

婆什迦罗能够熟练地使用诸如和差与半角等三角公式,在解二次方程中能够认识并广泛使用无理数,讨论了形如 $a+\sqrt{b}$ 和 $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ 的无理数的平方根.

由于印度屡被其他民族征服,使印度古代天文数学受外来文化影响较深,除希腊天文数学外,也不排除中国文化的影响,然而印度数学始终保持东方数学以计算为中心的实用化特点.与算术和代数相比,印度人在几何方面的工作则显得薄弱.

4.2 阿拉伯数学

"阿拉伯数学"并非单指阿拉伯国家的数学,而是指 8—15 世纪阿拉伯帝国统治下整个中亚和西亚地区的数学,包括希腊人、波斯人、犹太人和基督徒等所写的阿拉伯文及波斯文等数学著作.

穆斯林在穆罕默德(Mohammed)的鼓舞下,在他死后(632)不到半个世纪的时间内征服了从印度到西班牙,乃至北非和南意大利的大片土地,到 7 世纪初,阿拉伯半岛基本统一.755 年阿拉伯帝国分裂为两个独立王国.东部王国阿拔斯王朝,762 年迁都巴格达.西部王国,则定都西班牙的哥尔多华.909 年,在北非突尼斯又建立一个新的哈里发国家,973 年迁都埃及开罗.

在世界文明史上,阿拉伯人在保存和传播希腊、印度甚至中国的文化,最终为近代欧洲的文艺复兴准备学术前提方面作出了巨大贡献.阿拉伯建国后,东西两个帝国的哈里发都十分重视科学与艺术事业,他们曾经从拜占庭帝国收买大量希腊人手稿,他们还邀请各地科学家到他们的首都从事科学研究,巴格达成为当时的科学文化中心,阿拔斯王朝在那里设立的"智慧宫",吸引了大批学者,他们掀起了著名的翻译运动.在曼苏尔哈里发时期,婆罗摩笈多等印度天算家的著作在 766 年左右已传入巴格达,并译成阿拉伯文,8 世纪末到 9 世纪初的兰希哈里发时期,包括《几何原本》和《大成》在内的希腊天文数学经典先后被译

成阿拉伯文.9世纪最著名的翻译家塔比·伊本·库拉翻译了欧几里得、阿波罗尼奥斯、阿基米德、托勒玫、狄奥多修斯(Theodosius)等人的著作.到10世纪丢番图、海伦等人的著作也被译成阿拉伯文.阿拉伯学者们在广泛吸收古希腊、印度与中国的数学成果的基础上,也加上了他们自己的创造,使阿拉伯数学取得了对文艺复兴以后欧洲数学的进步有深刻影响的发展.

4.2.1 阿拉伯的代数

(一) 花拉子米《代数学》

阿拉伯数学的突出成就首先表现在代数学方面.花拉子米(Mohammed ibn Mūsā al-Khwārizmī,约783—850)是对欧洲数学影响最大的中世纪阿拉伯数学家,生于波斯北部花拉子米城(今乌兹别克斯坦境内),曾就学于中亚古城默夫(Merv),813年后来到巴格达,成为智慧宫的领头学者.他的《还原与对消计算概要》(al-Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala)(约820年前后)一书在12世纪被译成拉丁文,在欧洲产生巨大影响.阿拉伯语"al-jabr",意为还原,即移项;"wa'l-muqābala",意为对消,即同类项合并.传入欧洲后,到14世纪"al-jabr"演变为拉丁语"algebra",就成了今天英文"algebra"(代数)一词的来源,因此花拉子米的上述著作通常也称为《代数学》.《代数学》所讨论的数学问题本身大都比丢番图和印度人的问题简单,但它探讨一般性解法,因而远比丢番图的著作接近于近代初等代数.书中用代数方式处理了线性方程组与二次方程,第一次给出了一元二次方程的一般代数解法及几何证明,同时又引进了移项、同类项合并等代数运算等等,这一切为作为"解方程的科学"的代数学开拓了道路.《代数学》约1140年被英国人罗伯特(Robert of Chester)译成拉丁文,作为标准的数学课本在欧洲使用了数百年,引导了16世纪意大利代数方程求解方面的突破.

《代数学》首先指出,该书的数学问题都是由根(x)、平方(x^2)和数(常数)这三者组成.接着分六章叙述6种类型的一、二次方程求解问

题.第1章讨论"平方等于根"的方程,即 $ax^2 = bx$ 型方程;第2章讨论"平方等于数"的方程,即 $ax^2 = b$ 型方程;第3章讨论"根等于数"的方程,即一次方程 $ax = b$;第4、5、6章是关于三项二次方程求解问题,分别讨论三种类型的二次方程:

$$x^2 + px = q,\ x^2 + q = px,\ x^2 = px + q.$$

都给出了相应的求根公式.这六种方程的系数都是正数,可统一为以下一般形式

$$x^2 + px + q = 0.$$

这样,花拉子米相当于获得一般的求根公式

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

每一问题求出正根 x 后,花拉子米又求出根的平方 x^2.他明确指出,二次方程可能有两个正根,也可能有负根,但他不取负根与零根.

在以上六章内容之后,花拉子米又以几何方式证明上述各种解法的合理性.如对方程

$$x^2 + 21 = 10x$$

求解过程的证明如下:

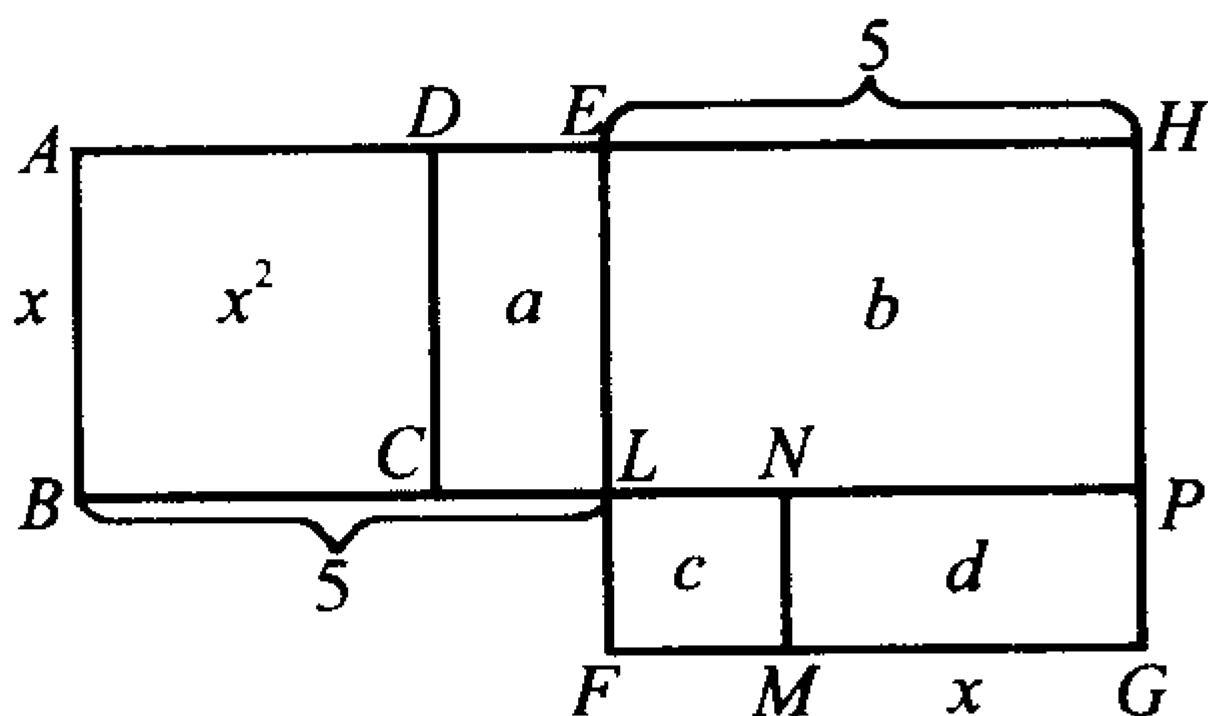


图 4.2

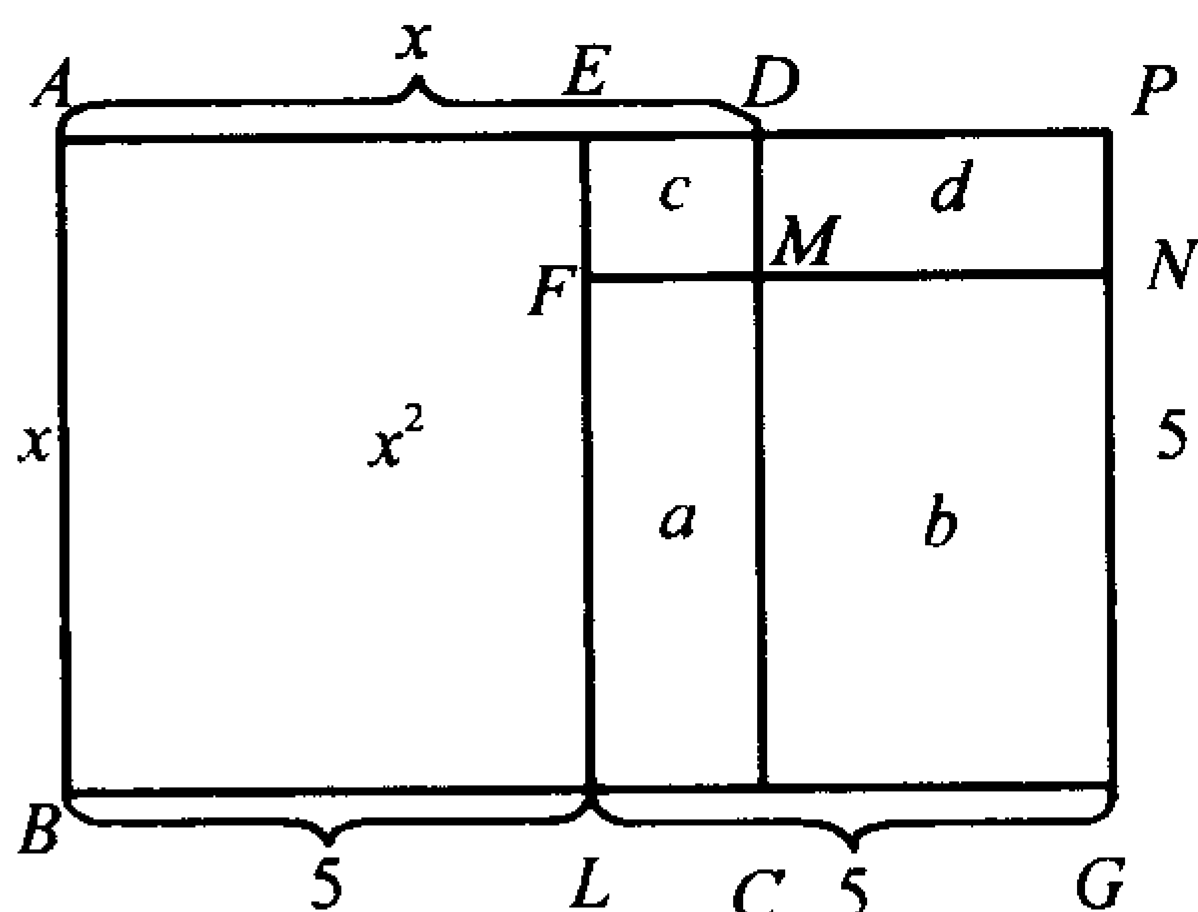


图 4.3

花拉子米分两种情况讨论.

当 $x < 5$ 时,以 x 为边作正方形 $ABCD$.延长 BC 至 L,使 $BL = 5$,

再延长 BL 至 P，使 $LP = 5$；同样，延长 AD 至 E，使 $AE = 5$，再延长至 H，使 $EH = 5$；以 EH 为边长作正方形 $EHGF$，以 LF 为边长作正方形 $LFMN$（如图 4.2），若记矩形 $DCLE$、$ELPH$、$LFMN$、$MNPG$ 的面积分别为 a、b、c、d，由图形可知，$x^2 + a + b = 10x$，这样 $a + b = 21$.

由于 $a = (5 - x)x = d$，于是 $c = 5^2 - b - d = 5^2 - 21$，即 $LF = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 2$. 那么，$CL = LF = 2$，故

$$x = BL - CL = \frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 3.$$

当 $x > 5$ 时，以 x 为边作正方形 $ABCD$. 在边 BC 上截取 $BL = 5$，延长 LC 至 G，使 $LG = 5$；以 LG 为边长作正方形 $LGNF$，以 LC 为边长作正方形 $EFMD$（如图 4.3），若记矩形 $FLCM$、$MCGN$、$EFMD$、$DMNP$ 的面积分别为 a、b、c、d，则由图形可知，$x^2 + b + d = 10x$，这样 $b + d = 21$.

由于 $a = c + d = 5(x - 5)$，$\left(\frac{10}{2}\right)^2 = a + b = c + d + b = c + 21$，于是 $c = 5^2 - b - d = 5^2 - 21$，即 $FM = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 2$. 那么，$LC = FM = 2$，故

$$x = BL + LC = \frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 7.$$

花拉子米还指出，任何二次方程都可以通过“还原”与“对消”的步骤化成他所讨论的六种类型方程. 由此可见，《代数学》关于方程的讨论已超越传统的算术方式，具有明显的代数特征，不过，在使用代数符号方面，相对丢番图和印度人的工作有了退步. 花拉子米用几何方式证明代数解法的传统被阿拉伯其他数学家所继承. 这种几何证明方式的来源今天尚不清楚，它似乎来源于希腊人的传统，但更接近于中国古代的“出入相补”特别是宋元数学中的“条段法”.

花拉子米的另一本书《印度计算法》（Algoritmi de numero indorum）也是数学史上十分有价值的数学著作，其中系统介绍了印度

数码和十进制记数法，以及相应的计算方法．尽管在8世纪印度数码和记数法随印度天文表传入阿拉伯，但并未引起人们的广泛注意，正是花拉子米的这本书使它们在阿拉伯世界流行起来，更值得称道的是，它后来被译成拉丁文在欧洲传播，所以欧洲一直称这种数码为阿拉伯数码．该书书名全译应为“花拉子米的印度计算法”，其中 Algoritmi 是花拉子米的拉丁译名，现代术语“算法”(Algorithm) 即源于此．

花拉子米的数学工作为艾布·卡米勒(Abu Kamil，约850—930)所继承，此人被称作“埃及的计算家”，可能是埃及人．他的《计算技巧珍本》的传播和影响仅次于花拉子米的《代数学》．其另一著作《论五边形和十边形》包括几何和代数两方面的内容，关于四次方程解法和处理无理系数二次方程是其主要特色．

(二) 奥马·海亚姆与三次方程

波斯人奥马·海亚姆(Omar Khayyam，约1048—1131)是11世纪最著名且最富成就的数学家、天文学家和诗人，生于霍拉桑的内沙布尔(今伊朗境内)．他曾得到塞尔柱统治者马利克沙(Malik-shah，1055—1092)的重用，受命在伊斯法罕(亦在今伊朗境内)天文台负责历法改革工作，制定了精密的哲拉里历．他在代数学方面的成就集中反映于他的《还原与对消问题的论证》(简称《代数学》)一书中，其中有开平方、开立方算法，但该书对代数学最杰出的贡献是用圆锥曲线解三次方程．

希腊人梅内赫莫斯为解决倍立方体问题而发现了圆锥曲线，实际上它与三次方程 $x^3 = 2a^2$ 相联系．阿基米德在解用平面截球，使所截得的两部分体积比为定值的问题时，导致一个三次方程：$x^2(a - x) = bc^2$．他利用两条圆锥曲线 $y(a - x) = ab$ 和 $ax^2 = c^2y$ 的交点来求解．阿基米德的传统启发了阿拉伯数学家，一些人也采取这种方式解三次代数方程．奥马·海亚姆首先将不高于三次的代数方程分为25类(系数为正数)，找到14类三次方程，对每类三次方程给出相应一种几何解法．例如解 $x^3 + ax = b$，首先将其化为$x^3 + c^2x = c^2d$(这里 $c^2 = a$，$c^2d = b$，按照希腊人的数学传统，a、b 是线段，c^2 正方形，c^2d 为长方体)，方程 $x^3 + c^2x = c^2d$ 的解就是抛物

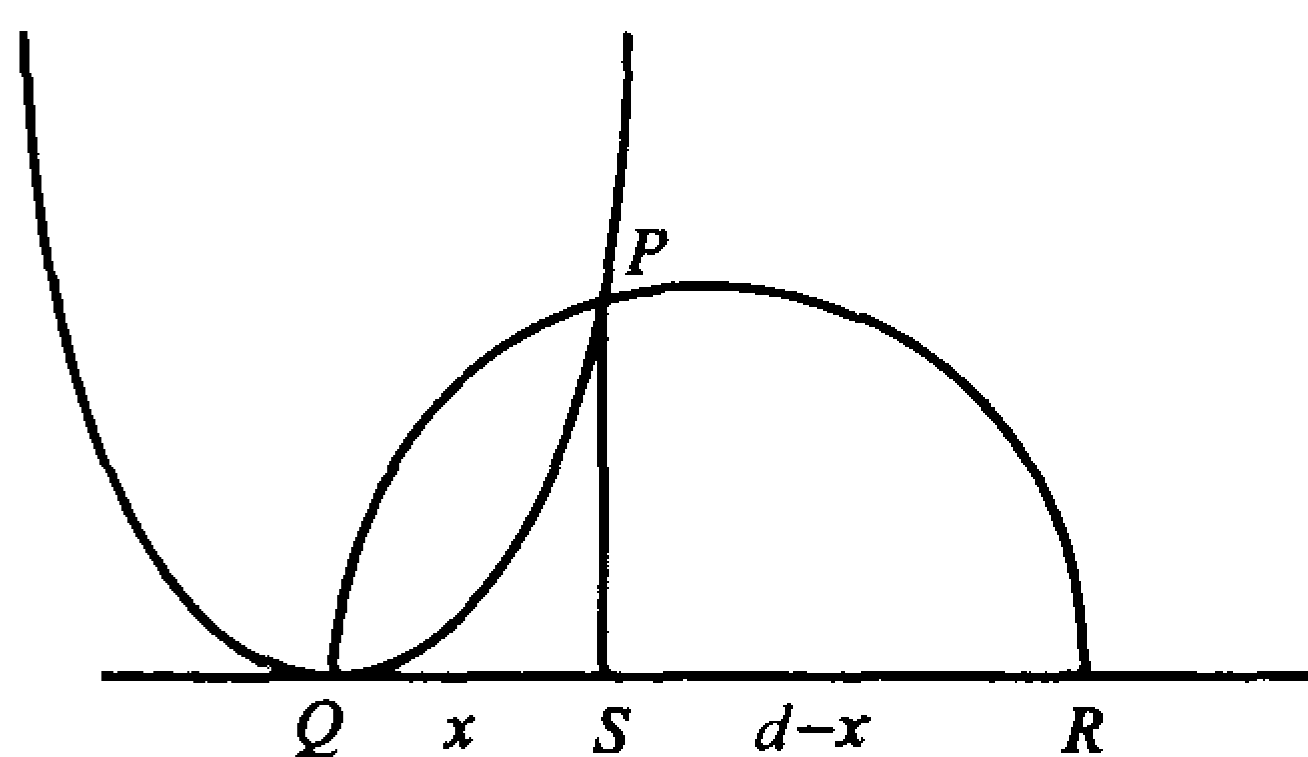


图 4.4

线 $x^2 = cy$ 与半圆 $y^2 = x(d - x)$ 交点横坐标 x. 他首先画出正焦弦为 c 的抛物线,再画出直径为 d 的半圆(如图 4.4),过它们的交点作垂线 PS,则 QS 长度就是方程的解. 这一创造,使代数与几何的联系更加密切. 可惜在 1851 年以前,欧洲人并不了解奥马·海亚姆的这种解析几何方法.

在求高次方程的数值解上,晚期的纳西尔·丁(Nasir-Eddin, 1201—1274)和阿尔·卡西(Al-Kashī,?—1429)都给出了开高次方的一般性算法. 阿尔·卡西是蒙古帖木儿时代撒马尔罕天文台负责人,他在《算术之钥》中还给出了用于开方的二项式系数表,与 11 世纪中国贾宪的"开方作法本源图"十分相似.《算术之钥》中还有"契丹算法"(即盈不足术,当时的历史学家称中国为契丹 al-Khataayn)和"百鸡问题",后来传入欧洲. 阿拉伯人代数学的确切来源并不清楚,除印度、亚历山大里亚的希腊数学外,应当还有中国数学的影响.

在使用数学符号方面,与丢番图相比阿拉伯人退步了,阿拉伯数学家没有继承丢番图的做法,始终用语言叙述他们的解法.

4.2.2 阿拉伯的三角学与几何学

由于数理天文学的需要,阿拉伯人继承并推进了希腊的三角术,其学术主要来源于印度的《苏利耶历数全书》等天文历表,以及希腊托勒玫的《大成》、梅内劳斯的《球面学》等古典著作.

由于天文计算的需要,阿拉伯天文学家都致力于高精度三角函数

表的编制.9 世纪的海拜什·哈西卜(Habash al-Hasīb, 约卒于 864—874)在印度人的基础上制定间隔为 15′ 的 60 进制正弦表,并且还编制了间隔为 1° 的正切表.艾布·瓦法(Abū'l-Wafā,940—997?)在哈西卜的基础上又进一步编制出间隔为 10′ 的正弦表和余弦表,特别是比鲁尼(Al-Bīrūnī,973—1050)利用二次插值法制定了正弦、正切函数表.

对希腊三角学加以系统化的工作是由 9 世纪天文学家阿尔·巴塔尼(Al-Battānī,858?—929)作出的,而且他也是中世纪对欧洲影响最大的天文学家.其《天文论著》(又名《星的科学》)被普拉托译成拉丁文后,在欧洲广为流传,哥白尼、第谷、开普勒、伽利略等人都利用和参考了它的成果.在该书中阿尔·巴塔尼创立了系统的三角学术语,如正弦、余弦、正切、余切.他称正弦为 jī ba,来源于阿耶波多的印度语术语 jī va,拉丁语译作 sinus,后来演变为英语 sine;称正切为 umbra versa,意即反阴影;余切为 umbra recta,意即直阴影.后来演变成拉丁语分别为 tangent 和 cotangent,首见于丹麦数学家芬克(T. Fink,1561—1656)的《圆的几何》(1583)一书中.而正割、余割是阿拉伯另一天文学家艾布·瓦法最先引入的.

阿尔·巴塔尼还发现了一些等价于下列公式的三角函数关系式:

$$\frac{\cot\alpha}{r}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \frac{\tan\alpha}{r}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \frac{\sin\alpha}{r}=\frac{r}{\csc\alpha}$$

$$\frac{\cos\alpha}{r}=\frac{r}{\sec\alpha},\quad r\sec\alpha=\sqrt{r^2+r^2\tan^2\alpha}$$

以及球面三角形的余弦定理:$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$.

艾布·瓦法和比鲁尼等人进一步丰富了三角学公式.艾布·瓦法曾在巴格达天文台工作,其重要的天文学著作《天文学大全》继承并发展了托勒玫的《大成》,尽管它在天文学方面没有什么超越托勒玫的创造,但其三角学方面的成就足以彪炳史册.其中除一些精细的三角函数表外,还证明了与两角和、差、倍角和半角的正弦公式等价的关于弦的一些定理,证明了平面和球面三角形的正弦定理.比鲁尼曾经得到马蒙(Ma'mun)哈里发的支持,在乌尔根奇建造天文台并从事天文观测,是一位有 146 多部著作的多产学者,其《马苏德规律》一书,在三角学方

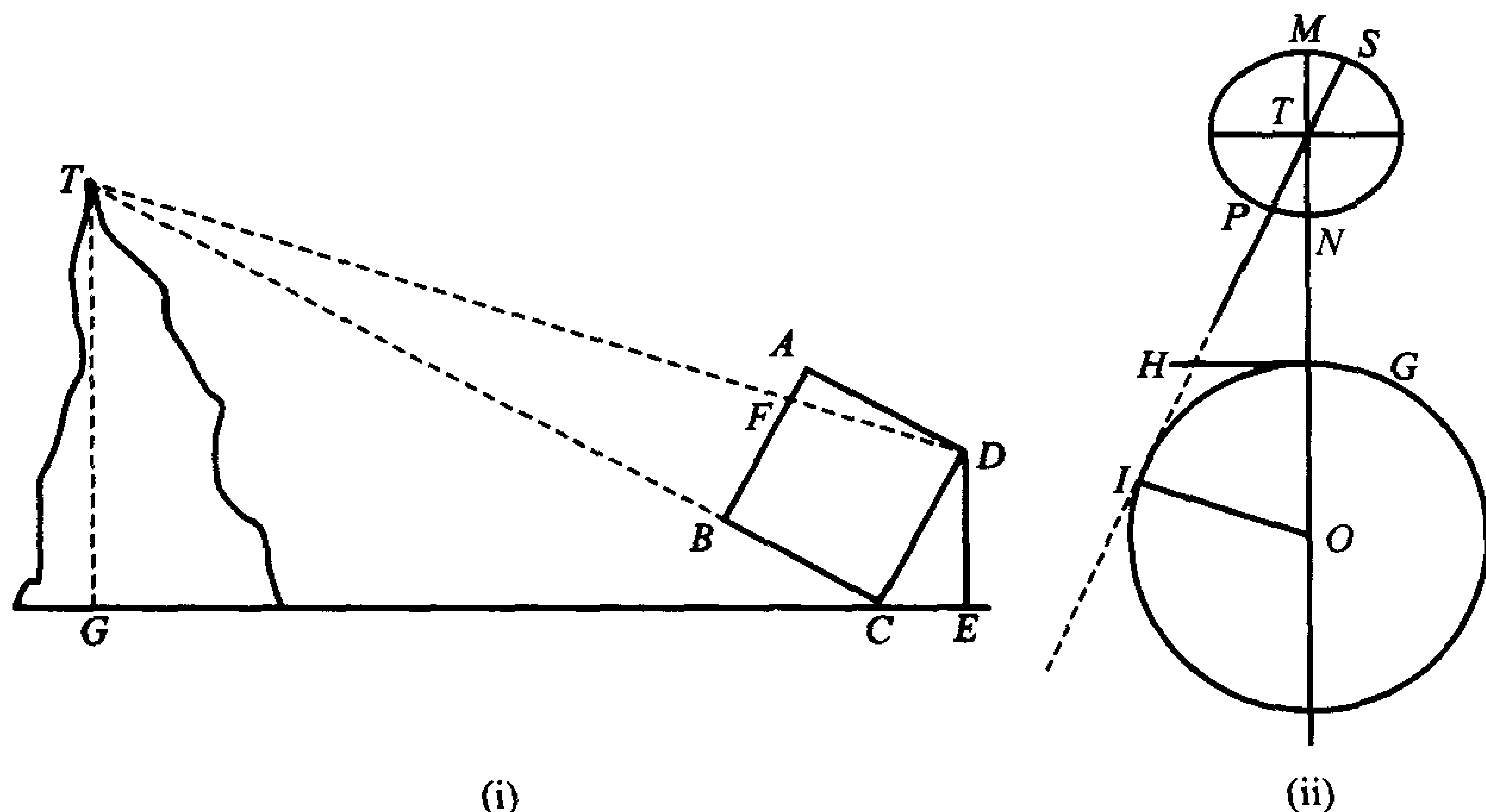


图 4.5

面有一些创造性的工作. 他给出一种测量地球半径的方法,他的做法首先用边长带有刻度的正方形 $ABCD$[如图 4.5(i)] 测出一座山高,$GT = \dfrac{CT \cdot CE}{CD}$(其中 $CT = \dfrac{AD \cdot CD}{FA}$),再于山顶 T 处悬一直径 SP 可以转动的圆环 $MPNS$[如图 4.5(ii)]. 从山顶 T 观测地平线上一点 I,测得俯角 $\angle OTI = \alpha$,由于 $HT = \dfrac{GT}{\sin(90° - \alpha)}$,$HG = \dfrac{GT}{\tan(90° - \alpha)}$,$HG = HI$,得到 $IT = HT + HG$,从而算出地球半径 $IO = \dfrac{IT}{\tan(90° - \alpha)}$. 比鲁尼算得 1° 子午线长为 106.4 ~ 124.2 km.

比鲁尼还证明了正弦公式、和差化积公式、倍角公式和半角公式. 后来阿尔 · 卡西利用这些公式计算了 sin1° 的值. 阿尔 · 卡西首先求出 sin72° 和 sin60° 的值,以求 sin12° = sin(72° − 60°) 的值,再用半角公式求 sin3° 的值,由三倍角公式得出 $\sin 3° = 3\sin 1° - 4\sin^3 1°$,即 sin1° 是三次方程 $\sin 3° = 3x - 4x^3$ 的解. 阿尔 · 卡西用相当于牛顿迭代法的算法:$x_n = \dfrac{\sin 3° + 4x_{n-1}^3}{3}$($x_1 = \sin 3°$)求出 sin1° 的近似值.

如果说希腊以来,三角术仅是天文学的附属的话,那么这种情况在纳西尔 · 丁那里发生了一些改变. 1201 年纳西尔 · 丁出生于伊朗的图

斯,生活于十字军和蒙古人的侵占时代,是一位知识渊博的学者.由于蒙古伊儿汗帝国的君主旭烈兀十分重视科学文化,纳西尔·丁受到他的礼遇,他建议在马拉盖建造大型天文台,得到旭烈兀的允许和支持,其后他一直在这里从事天文观测与研究.他的天文学著作《伊儿汗天文表》(1271)是历法史上的重要著作,其中测算出岁差 51″/每年.其《天文宝库》则对托勒玫的宇宙体系加以评注,并提出新的宇宙模型.他的《论完全四边形》是一部脱离天文学的系统的三角学专著.所谓完全四边形,即指平面上的两两相交的四条直线或球面上的四条大圆弧所构成的图形.该书系统阐述了平面三角学,明确给出正弦定理.讨论球面完全四边形,对球面三角形进行分类,指出球面直角三角形的 6 种边角关系(C 为直角):

$$\cos c = \cos a\cos b;\quad \cos c = \cot A\cot B;$$
$$\cos A = \cos a\sin B;\quad \cos A = \tan b\cot C;$$
$$\sin b = \sin c\sin B;\quad \sin b = \tan a\cot B.$$

并讨论了解平面和球面斜三角形的一些方法,引入极三角形的概念以解斜三角形.他指出在球面三角形中,由三边可以求三角,反之,由三角可以求三边,这是球面三角与平面三角相区别的一个重要标志.纳西尔·丁的《论完全四边形》对 15 世纪欧洲三角学的发展起着非常重要的作用.

与希腊人三角术的几何性质相比,阿拉伯人的三角术与印度人一样是算术性的.例如由正弦值求余弦值时,他们利用恒等式 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 作代数运算而求解,而不是利用几何关系来推算,这是一种进步.他们和印度人一样,用弧的正弦而不用双倍弧的弦,正弦(或半弦)的单位取决于半径的单位.

与阿拉伯人的代数成就和三角学成就相比,阿拉伯人在几何方面的工作主要是对希腊几何的翻译与保存,并传给了欧洲.但希腊几何学对阿拉伯数学的严格性也产生一定的作用,并激发出思想的火花.最重要的例子是他们在评注《几何原本》的过程中,对第五公设产生了兴趣,不少人试图证明这条公设,如焦赫里(Al-Jawhari,约830)、塔比·伊本·库拉(Thabit ibn Qurra,约 826—901)、伊本·海塞姆(Ibn al-Haytham,965—1040?)、奥马·海亚姆以及纳西尔·丁等人.

奥马·海亚姆在其《辨明欧几里得公设中的难点》(1077) 中,试图证明平行公设.其做法是,作 DA 和 CB 同垂直于 AB,且令 $DA = CB$,构造一个四边形 $ABCD$[如图 4.6(i)].首先证明 $\angle ADC = \angle BCD$.它们的大小存在 3 种情形:(1) 直角;(2) 钝角;(3) 锐角.他用反证法,说明了后两种情形所出现的矛盾,等价于证明了第五公设.他在证明过程中,实际上引用了与第五公设等价的假设:两条直线如果越来越近,那么它们必定在这个方向上相交.

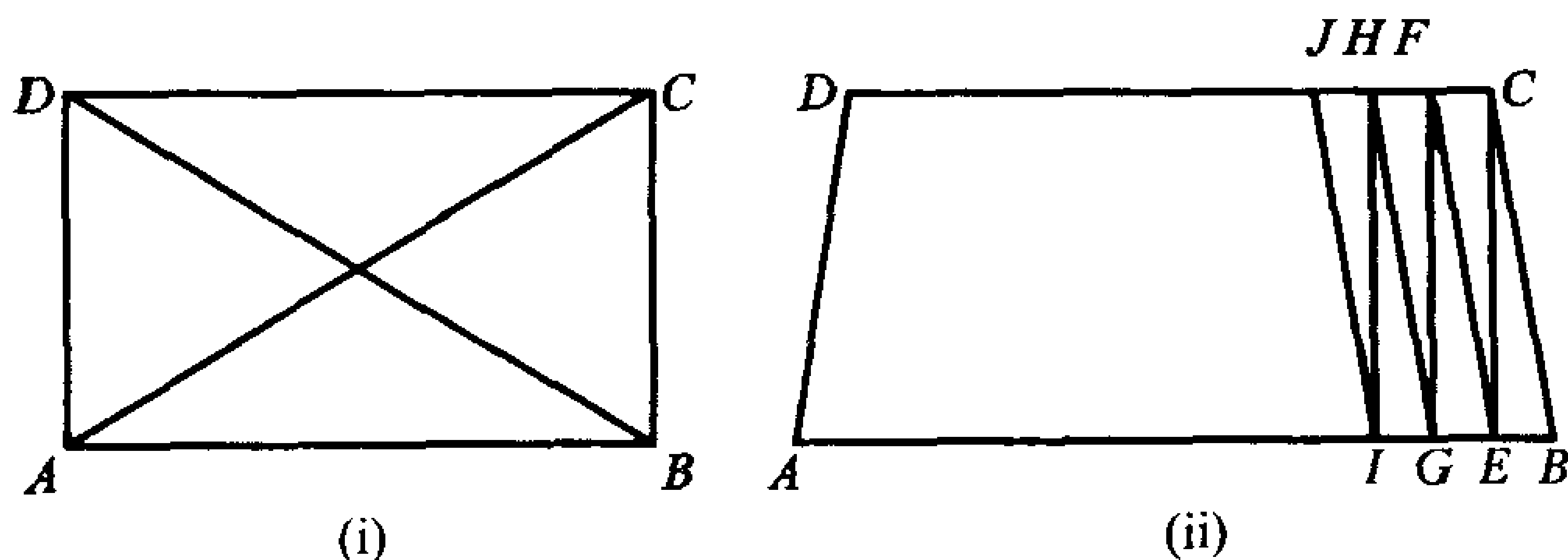


图 4.6

奥马·海亚姆的证明被纳西尔·丁所继承,纳西尔·丁在他的两种《几何原本》译注中都讨论了平行公理,其《令人满意的论著》一书是关于平行公设研究的专著.对于奥马·海亚姆的四边形,他也通过证明 $\angle ADC = \angle BCD = 90°$,以推出第五公设.为此,纳西尔·丁也用反证法考虑:若 $\angle BCD$ 为钝角,则可作 $CE \perp DC$,有 $\angle CEA > \angle CBA = 90°$,为钝角,故又可作 $EF \perp AB$,同理 $\angle EFD$ 为钝角,显然 $BC < CE$(直角三角形的直角边与斜边).如此一直作下去,有 $BC < CE < EF < FG < GH < HI < \cdots$,这些折线向左越来越大,最后必然大于 DA,于是出现矛盾[如图 4.6(ii)].若 $\angle BCD$ 为锐角,按照这种方式做,同样也出现矛盾.从而证明了 $\angle ADC = \angle BCD = 90°$.

实际上,纳西尔·丁的证明没有考虑到折线向左延展过程中,越来越密,以至永远不能超过 AB 的中点,更不用说到达 DA 边了.17 世纪英国数学家沃利司(J. Wallis,1616—1703) 再次研究了纳西尔·丁的这一证法.

阿拉伯人关于第五公设证明的尝试,诱发了后世欧洲学者在这方面的兴趣,对非欧几何的诞生有一定的影响.

近代数学的兴起

5

5.1 中世纪的欧洲

公元 5—11 世纪，是欧洲历史上的黑暗时期，天主教会成为欧洲社会的绝对势力．封建宗教统治，使一般人笃信天国，追求来世，从而淡漠世俗生活，对自然不感兴趣．教会宣扬天启真理，并拥有解释这种真理的绝对权威，导致了理性的压抑，欧洲文明在整个中世纪处于凝滞状态．

由于罗马人偏重于实用而没有发展抽象数学，这对罗马帝国崩溃后的欧洲数学也有一定的影响，终使黑暗时代的欧洲在数学领域毫无成就．不过因宗教教育的需要，也出现一些水平低下的算术和几何教材．罗马人博埃齐（A. M. S. Boethius，约 480—524）根据希腊材料用拉丁文选编了《几何》、《算术》等教科书，《几何》内容仅包含《几何原本》的第一卷和第三、四卷的部分命题，以及一些简单的测量术；《算术》则是根据 400 年前尼科马科斯的一本浅易的著作编写的．这样简单的书籍竟一直成为欧洲教会学校的标准课本．此外，这一时期还有英国的比德（V. Bede，674—735）和后来成为教皇的法国人热尔拜尔（Gerbert，约 950—1003，第一个在西班牙穆斯林学校学习的基督教徒）等人也讨论过数学，前者研究过算术中的指算，据说后者可能把印度 - 阿拉伯数码带入欧洲．

直到 12 世纪，由于受翻译、传播阿拉伯著作和希腊著作的刺激，欧

洲数学才开始出现复苏的迹象.1100 年左右,欧洲人通过贸易和旅游,同地中海地区和近东的阿拉伯人以及东罗马帝国的拜占庭人发生了接触.十字军为掠夺土地的东征,使欧洲人进入了阿拉伯世界.从此,欧洲人从阿拉伯人和拜占庭人那里了解到希腊以及东方古典学术.古典学术的发现激起了他们极大的兴趣;对这些学术著作的搜求、翻译和研究,最终导致了文艺复兴时期欧洲数学的高涨.文艺复兴的前哨意大利,由于其特殊的地理位置和贸易联系而成为东西方文化的熔炉.古代学术传播西欧的路线如图 5.1 所示.

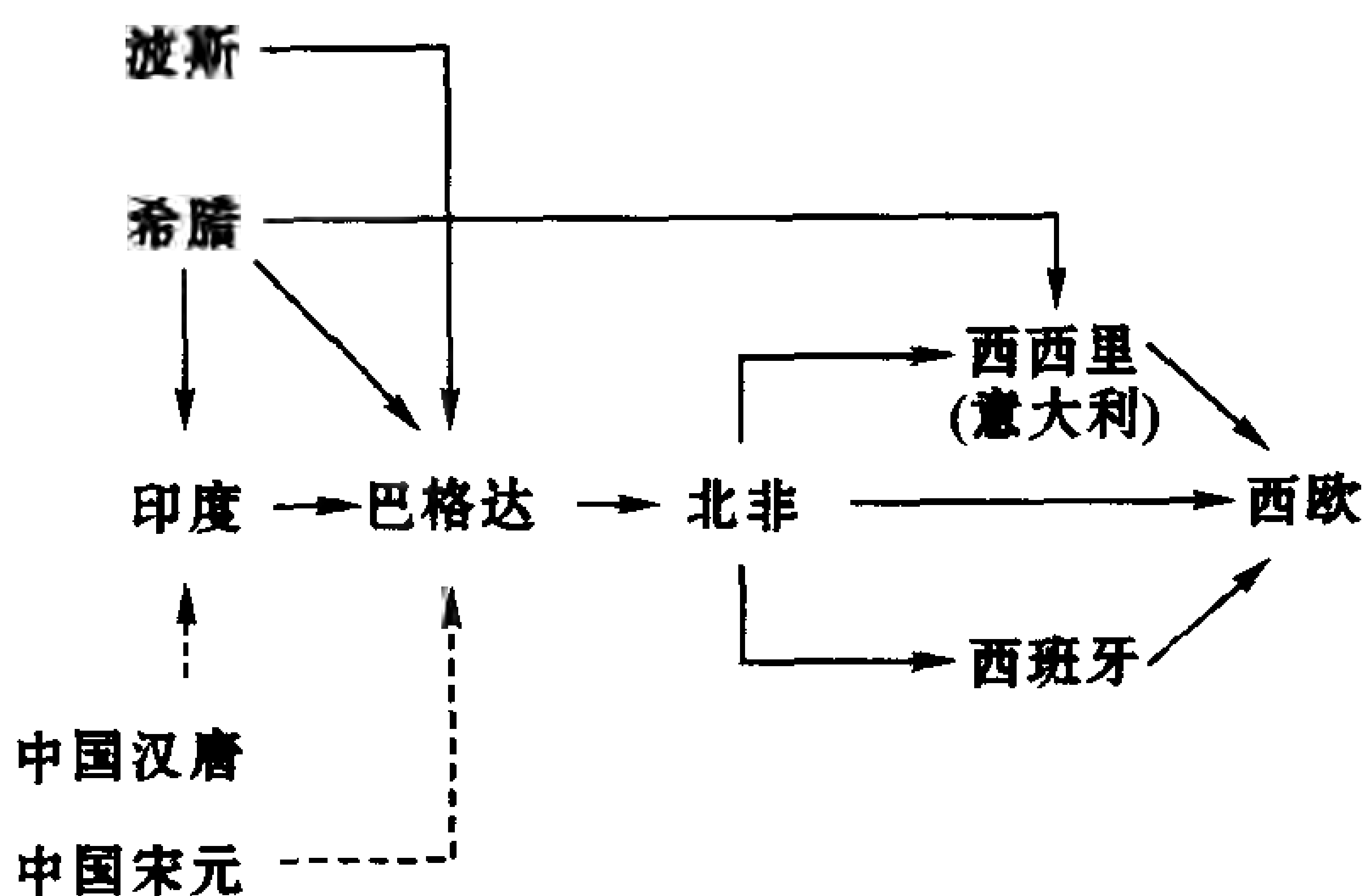


图 5.1

数学著作的翻译主要有:英国的阿德拉特(Adelard of Bath,约 1120)翻译的《原本》和花拉子米的天文表;意大利人普拉托(Plato of Tivoli,12 世纪上半叶)翻译的巴塔尼的《天文论著》、狄奥多修斯的《球面几何》以及其他著作;英国罗伯特(Robert of Chester)翻译的花拉子米《代数学》等.12 世纪最伟大的翻译家杰拉德(Gerard of Cremona,约 1114—1187)将 90 多部阿拉伯文著作翻译成拉丁文,其中包括托勒玫的《大成》、欧几里得的《原本》、阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》以及阿基米德的《圆的度量》.可以说 12 世纪是欧洲数学的翻译时代.

欧洲黑暗时期过后,第一位有影响的数学家是斐波那契(L. Fibonacci,1170—1250).他早年就随其父在北非师从阿拉伯人学习

算学,后又游历地中海沿岸诸国,回意大利后写成《算经》(Liber Abaci,1202,亦译作《算盘书》).这部很有名的著作主要是一些源自古代中国、印度和希腊的数学问题的汇集,内容涉及整数和分数算法,开方法,二次和三次方程以及不定方程.特别是,书中系统介绍了印度-阿拉伯数码,对改变欧洲数学的面貌产生了很大影响.1228年的《算经》修订版还载有如下"兔子问题":

某人在一处有围墙的地方养了一对兔子,假定每对兔子每月生一对小兔,而小兔出生后两个月就能生育.问从这对兔子开始,一年内能繁殖成多少对兔子?

对这个问题的回答,导致了著名的斐波那契数列:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots.$$

这个数列产生的规则很简单,即开头两个数1以后的每个数都是由它前面两个数相加而得.《算经》可以看作是欧洲数学在经历了漫长的黑夜之后走向复苏的号角.

欧洲数学复苏的过程十分曲折,从12世纪到15世纪中叶,教会中的经院哲学派利用重新传入的希腊著作中的消极成分来阻抗科学的进步.特别是他们把亚里士多德、托勒玫的一些学说奉为绝对正确的教条,企图用这种新的权威主义来继续束缚人们的思想.欧洲数学真正的复苏,要到15、16世纪.在文艺复兴的高潮中,数学的发展与科学的革新紧密结合在一起,数学在认识自然和探索真理方面的意义被文艺复兴的代表人物高度强调.达·芬奇(Leonardo da Vinci,1452—1519)就这样说过:"一个人若怀疑数学的极端可靠性就是陷入混乱,他永远不能平息诡辩科学中只会导致不断空谈的争辩.…… 因为人们的探讨不能称为科学的,除非通过数学上的说明和论证."伽利略干脆认为宇宙"这本书是用数学的语言写成的".科学中数学化趋势的增长促使数学本身走向繁荣.以下简略介绍这一时期数学发展的重要方面.

5.2　向近代数学的过渡

5.2.1　代数学

欧洲人在数学上的推进是从代数学开始的，它是文艺复兴时期成果最突出、影响最深远的领域，拉开了近代数学的序幕．主要包括三、四次方程求解与符号代数的引入这两个方面．

花拉子米的《代数学》被翻译成拉丁文后，开始在欧洲传播，不过，直到15世纪，人们还以为三、四次方程与化圆为方问题一样难以解决．第一个突破是波伦亚大学的数学教授费罗(S. Ferro，1465—1526)大约在1515年作出的，他发现了形如 $x^3+mx=n\ (m,n>0)$ 的三次方程的代数解法．按当时的风气，学者们不公开自己的研究成果，费罗将自己的解法秘密传给他的学生费奥(A. M. Fior)．1535年，意大利另一位数学家塔塔利亚(Niccolo Fontana，1499?—1557，绰号 Tartaglia 意为口吃者)也宣称自己可以解形如 $x^3+mx^2=n\ (m,n>0)$ 的三次方程．怀疑之余，费奥向塔塔利亚挑战，要求各自解出对方提出的30个三次方程．比赛在米兰大教堂公开举行，结果是，塔塔利亚很快解出形如 $x^3+mx^2=n$ 和 $x^3+mx=n\ (m,n>0)$ 两类型的所有三次方程，而费奥仅能解出后一类型的方程．塔塔利亚获胜而归，却依然保守解法的秘诀．后经一位教书行医于米兰的学者卡尔丹(G. Cardano，1501—1576)的再三请求，在后者发誓保密的情况下，塔塔利亚将解法传给了卡尔丹．不久，卡尔丹违背诺言而在1545年出版的著作《大法》(Ars Magna)中公布了这些解法．《大法》所载三次方程 $x^3+px=q(p,q>0)$ 的解法，实质是考虑恒等式

$$(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3,$$

若选取 a 和 b，使

$$3ab=p,\quad a^3-b^3=q, \tag{*}$$

由(*)不难解出 a 和 b：

$$a=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\quad b=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

于是得到 $a-b$ 就是所求的 x，后人称之为卡尔丹公式. 卡尔丹还对形如 $x^3=px+q(p,q>0)$ 的方程给出了解的公式：$x=a+b$，其中

$$a=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\quad b=\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$



图 5.2　塔塔利亚



图 5.3　卡尔丹

对于带有二次项的三次方程，通过变换总可以将二次项消去，从而变成卡尔丹能解的类型.

三次方程解决后不久，1540 年意大利数学家达科伊(T. da Coi) 向卡尔丹提出一个四次方程的问题，卡尔丹未能解决，但由其学生费拉里(L. Ferrari，1522—1565) 解决了，其解法也被卡尔丹写进《大法》中. 该解法是先通过变换将一般四次方程 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 简化为 $y^4+py^2+qy+r=0$(这总可以做到)，由此进一步得到

$$y^4+2py^2+p^2=py^2-qy-r+p^2,$$

于是，对于任意的 z，有

$$\begin{aligned}(y^2+p+z)^2&=py^2-qy+p^2-r+2z(y^2+p)+z^2\\&=(p+2z)y^2-qy+(p^2-r+2pz+z^2),\end{aligned}$$

再选择适当的 z，使上式右边成为完全平方式，实际上使

$$4(p+2z)(p^2-r+2pz+z^2)-q^2=0$$

即可.这样就变为 z 的三次方程.

费拉里所讨论的四次方程类型主要有以下几种:

$$x^4 = ax^3 + bx^2 + c,\quad x^4 = ax^3 + b,$$
$$x^4 = ax^2 + bx + c,\quad x^4 = ax + b.$$

现在看来,说卡尔丹完全是剽窃,显然有失公正,因为他在书中已注明三次方程解法是塔氏告诉他的,而且塔氏也没有给出证明.卡尔丹不仅将塔氏方法推广到一般情形的三次方程,而且补充了几何证明.书中对三次方程求解中的所谓"不可约"情形感到困惑(不可约情形就是判别式 $\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$),实质上已邂逅复数.在卡氏去世后4年的1572年,意大利数学家邦贝利(R. Bombelli,约1526—1573)在其所著教科书《代数》中引进了虚数,用以解决三次方程不可约情况,并以 *dimRq* 11 表示 $\sqrt{-11}$.卡尔丹已认识到复根是成对出现的(这一推测后来被牛顿在其《普遍算术》中所证明),并且三次方程有三个根,四次方程有四个根.在此基础上,荷兰人吉拉德(A. Girard,1593—1632)于《代数新发现》(1629)中又作了进一步的推断:对于 n 次多项式方程,如果把不可能的(复数)根考虑在内,并包括重根,则应有 n 个根,这就是著名的"代数基本定理".不过,吉拉德没有给出证明.卡尔丹还发现了三次方程的三根之和等于 x^2 项的系数的相反数,每两根乘积之和等于 x 项的系数,等等,这种根与系数的关系问题后来由韦达、牛顿和格列高里(J. Gregory,1638—1675)等人作出系统阐述.

在法国,数学家韦达(F. Vieta,1540—1603)写了《分析引论》(In Artem Analyticem Isagoge,1591)、《论方程的整理与修正》(1615)与《有效的数值解法》(1600)等方程论著作,其中包括给出代数方程的近似解法与代数方程的多项式分解因式解法.1637年,笛卡儿首次应用待定系数法将四次方程分解成两个二次方程求解.今天所说的因式分解定理,最早由笛卡儿在其《几何学》中提出,他说:$f(x)$能为$(x-a)$整除,当且仅当 a 是$f(x)=0$的一个根.笛卡儿在《几何学》中也未加证明地叙述了 n 次多项式方程应有n个根的论断,以及今天所谓的"笛卡儿符号法则":多项式方程$f(x)=0$的正根的最多个数等于系数变号

的次数,负根的最多个数等于两个正号与两个负号连续出现的次数.文艺复兴时期有关代数方程的这些零星结果,是后来关于高次代数方程理论的一系列漫长而影响深远的探索的起点.

代数上的进步还在于引用了较好的符号体系,这对于代数学本身的发展以及分析学的发展来说,至关重要.正是由于符号化体系的建立,才使代数有可能成为一门科学.近现代数学最为明显的标志之一,就是普遍地使用了数学符号,它体现了数学学科的高度抽象与简炼.

数学符号系统化首先归功于法国数学家韦达,由于他的符号体系的引入导致代数性质上产生重大变革.韦达原是律师与政治家,业余时间研究数学.他曾在布列塔尼(Brittany)议会工作,后任那瓦尔亨利(Henry)亲王的枢密顾问官.他在政治上失意的1584—1589年间,献身于数学研究,曾研究过卡尔丹、塔塔利亚、邦贝利、史蒂文(S. Stevin,约1548—1620)和丢番图等人的著作,从这些著作特别是丢番图的著作中获得了使用字母的想法.在《分析引论》中,他第一次有意识地使用系统的代数字母与符号,以辅音字母表示已知量,元音字母表示未知量.他把符号性代数称作"类的算术",同时规定了算术与代数的分界,认为代数运算(Logistica speciosa)施行于事物的类或形式,算术运算(Logistica numerosa)施行于具体的数.这就使代数成为研究一般类型的形式和方程的学问,因其抽象而应用更为广泛.



图5.4 韦达

韦达的这种做法受到后人的赞赏,并被吉拉德的《代数新发现》和奥特雷德(W. Oughtred,1575—1660)的《实用分析术》所继承,特别是通过后者的著作使采用数学符号的风气流行起来.对韦达所使用的代数符号的改进工作是由笛卡儿完成的,他首先用拉丁字母的前几个($a,b,c,d,\cdots$)表示已知量,后几个($x,y,z,w,\cdots$)表示未知量,成为今天的习惯.韦达的符号代数保留着齐性原则,要求方程中各项都是"齐性"的,即体积与体积相加,面积与面积相加.这一障碍随着笛卡儿

解析几何的诞生也得到消除.

到 17 世纪末,欧洲数学家已普遍认识到,数学中刻意使用符号具有很好的功效.并且使数学问题具有一般性.不过当时随意引入的符号太多,我们今天所使用的符号,实际是这些符号经过长期淘汰后剩下来的.现部分列出文艺复兴时期出现的缩写代数符号:

运算或关系	符号	使用者	时间
方根	R	Fibonacci(意)	1202 年
加,减	p, m	L. Pacioli(约 1445—1517,意)	1494 年
加,减	+, −	J. Widman(德)	1489 年
减	~	W. Oughtred(英)	1631 年
等于	=	R. Recorde(英)	1557 年
等于	~	Vieta(法)	1591 年
等于	$\propto$	Descartes(法)	1637 年
乘	×	W. Oughtred(英)	1631 年
乘	·	W. Oughtred(英)	1631 年
比例	::	W. Oughtred(英)	1631 年
除	÷	J. H. Rahn(1622—1676,瑞士)	1659 年
大于,小于	>, <	T. Harriot(1560—1621,英)	16 世纪
根号	$\sqrt{\quad}$	C. Rudolff(奥地利)	16 世纪
根号	$\sqrt[n]{\quad}$	A. Girard(荷)	16 世纪
乘幂	a^n	N. Chuquet(法)	1484 年
指数 a^3	aaa	T. Harriot(英)	16 世纪
指数 a^3	$a3$	P. Herigone(法)	1634 年
指数 a^x	a^x	Descartes(法)	1637 年
已知数 未知数	$a, b, c, \cdots$ $x, y, z, \cdots$	Descartes(法)	1637 年

5.2.2 三角学

航海、历法推算以及天文观测的需要,推动了三角学的发展.早期

三角学总是与天文学密不可分，这样在 1450 年以前，三角学主要是球面三角，后来由于间接测量、测绘工作的需要而出现了平面三角. 15、16 世纪德国人开始对三角学作出新的推进，他们从意大利获得了阿拉伯天文学著作中的三角学知识. 游学意大利、后来定居维也纳的波伊尔巴赫(G. Peurbach，1423—1461) 曾经把托勒玫的《大成》译成拉丁文，并且编制了十分精确的正弦表. 在欧洲，第一部脱离天文学的三角学专著是波伊尔巴赫的学生雷格蒙塔努斯(J. Regiomontanus，1436—1476) 的《论各种三角形》. 雷格蒙塔努斯原名叫米勒(J. Müller)，生于德国，曾经游历于意大利，他搜集、译注了托勒玫的《大成》，还翻译过阿波罗尼奥斯、海伦、阿基米德等希腊数学家的著作. 1464 年他撰写了自己的著作《论各种三角形》，该书主要从纳西尔 · 丁的著作中吸取养分，全书分五卷，前两卷论平面三角，后三卷论球面三角，给出了球面三角的正弦定理和关于边的余弦定理. 雷格蒙塔努斯在其另一部著作《方位表》中，制定了多达 5 位的三角函数表，除正弦和余弦表外，还有正切表. 在 1450 年以前，希腊、阿拉伯人著作中的三角方法很不严谨，雷格蒙塔努斯首次对三角学作出完整、独立的阐述，使其开始在欧洲广泛传播.

随后，维尔纳(J. Werner，1468—1528) 著《论球面三角》(1514)，改进并发展了雷格蒙塔努斯的思想. 不过此时的三角学存在一个最大的困难，就是缺少一批公式，使用仅知的几个公式，计算十分困难，这主要由于雷格蒙塔努斯只采用正弦和余弦函数，而且其函数值限定为正数所致. 哥白尼的学生雷提库斯(G. J. Rhaeticus，1514—1576) 将传统的弧与弦的关系，改进为角的三角函数关系，并采用了六个函数(正弦、余弦、正切、余切、正割、余割)，而且还编制了间隔为 10″ 的 10 位和 15 位正弦表.

三角学的进一步发展，是法国数学家韦达所做的平面三角与球面三角系统化工作. 他在《标准数学》(1579) 和《斜截面》(1615) 二书中，把解平面直角三角形和斜三角形的公式汇集在一起，其中包括他自己得到的正切公式：

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}.$$

他还给出了解球面直角三角形的方法和一套公式，以及帮助记忆这些公式的今天所谓的“纳皮尔法则”．这些球面三角公式大都是托勒玫建立的，但也有韦达自己提出的公式，如

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\sin a\ (A\text{ 为钝角}),$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2},$$

尤为重要的是韦达将这套三角恒等式表示成了代数形式，尽管他所用的并不是现代符号．

在16世纪，三角学已从天文学中分离出来，成为一个独立的数学分支．

5.2.3　从透视学到射影几何

欧洲几何学创造性活动的复兴晚于代数学．16世纪欧洲数学家中很多人关心阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线》第8卷的恢复与整理，圆锥曲线在天文学上的应用，促使人们需要重新审视希腊人的圆锥曲线，以及其他高等曲线．光学本是希腊人的兴趣之一，也是由于天文观测的需要，它又日益成为文艺复兴时期的一个重要课题．不过文艺复兴时期给人印象最深的几何创造其动力却来自艺术．

中世纪宗教绘画具有象征性和超现实性．而文艺复兴时期，描绘现实世界成为绘画的重要目标，这就使画家们在将三维现实世界绘制到二维的画布上时，面临这样一些问题：

(1) 一个物体的同一投影的两个截影有什么共同的性质？

(2) 从两个光源分别对两个物体投影得同一物影，那么这两个物体有何共同的几何性质？

正是由于绘画、制图中提出的这类问题的刺激而导致了富有文艺复兴特色的学科——透视学的兴起，从而诞生了射影几何学．意大利人布努雷契

(F. Brunelleschi, 1377—1446) 是第一个认真研究透视法并试图运用几何方法进行绘画的艺术家. 数学透视法的天才阿尔贝蒂(L. B. Alberti, 1404—1472) 的《论绘画》(1511) 一书, 则是早期数学透视法的代表作, 书中除引入投影线、截影等一些概念外, 还讨论了截影的数学性质, 成为射影几何学发展的起点.

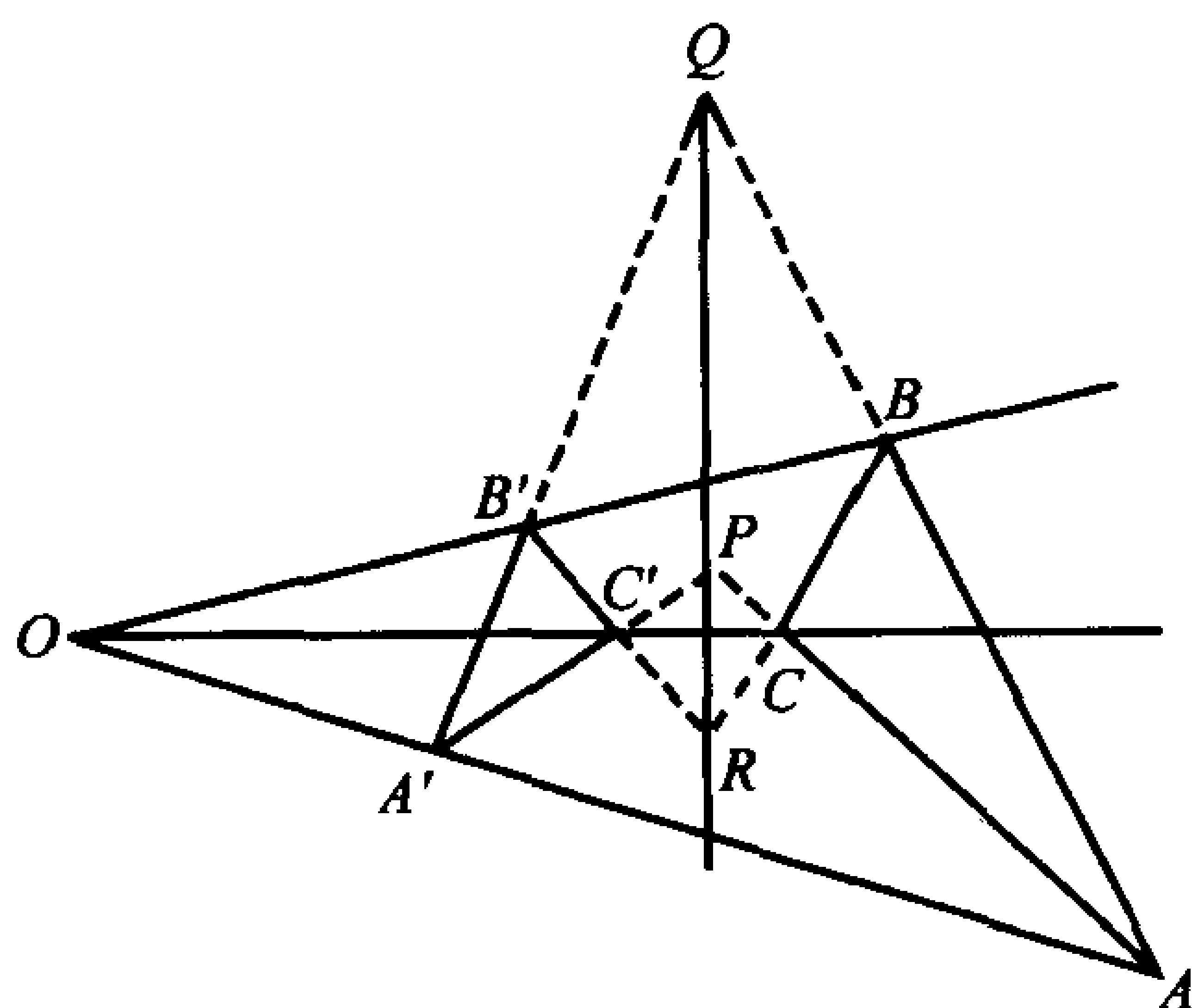


图 5.5

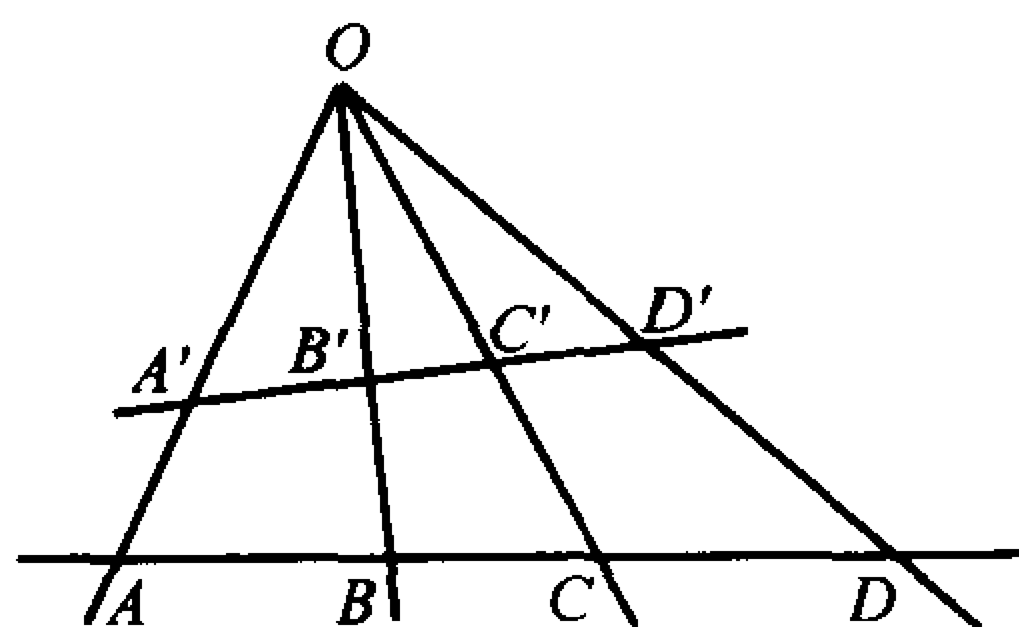


图 5.6

对于透视法所产生的问题从数学上直接给予解答的第一个人是德沙格(G. Desargues, 1591—1661). 他原是法国陆军军官, 后来成为工程师和建筑师, 靠自学成名. 他希望证明阿波罗尼奥斯圆锥曲线的定理而着手研究投影法. 1636 年, 他发表了第一篇关于透视法的论文, 但他的主要著作则是 1639 年发表的《试论锥面截一平面所得结果的初稿》, 书中引入 70 多个射影几何术语, 其中一些相当古怪, 如投影线叫"棕", 标有点的直线叫"干", 其上有三点成对合关系的直线叫"树" 等等. 这使得他的书晦涩难读, 因而影响很小. 但这部著作确实充满了创造性的思想, 其中之一就是他从焦点透视的投影与截影原理出发, 对平行线引入无穷远点的概念, 继而获得无穷远线的概念. 随后他讨论了今天所谓的德沙格定理: 投影三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 的对应边(或延长线) 交点 Q、R、P 共线. 反之, 对应边交点共线的三角形, 对应顶点连线 AA'、BB'、CC' 共点 O(如图 5.5). 德沙格后来又在他朋友鲍瑟(A. Bosse) 1648 年发表的一本透视法著作的附录中, 讨论了其他一些

射影性质,其中包含投影变换下交比不变性定理.一直线上的四点 A、B、C、D 间的线段构成的比$\frac{BA}{BC}\Big/\frac{DA}{DC}$定义为它们的交比,古希腊的梅内劳斯(Menelaus)和帕波斯(Pappus)曾经讨论过这种形式的线段比,德沙格则从投影观点考虑,证明了投影线的每个截线上的交比都相等(如图 5.6).

德沙格的另一项重要工作是从对合点问题出发首次讨论了调和点组的理论.对于一直线上的特定点 O(对合中心)以及两对点 A、B 和 A'、B',若有 $OA \cdot OB = OA' \cdot OB'$,则 A、B 和A'、B' 对合.德沙格利用射影原理证明了,在圆锥曲线的内接四边形中,任一不过顶点的直线与圆锥曲线以及与完全四边形对边相交的四对点具有对合关系.在对合概念的基础上,他引入共轭点与调和点组,认为对合、调和点组关系在投影变换下具有不变性.进一步,研究了极点与极带理论.他最后利用这些理论研究阿波罗尼奥斯的圆锥曲线,将圆锥曲线的直径视作无穷远点的极带,通过投影和截影这种新的证明方法,统一处理了不同类型的圆锥曲线.

另一位法国数学家帕斯卡(B.Pascal,1623—1662)16 岁时就开始研究投射与取景法,他曾接受德沙格的建议,把圆锥曲线的许多性质简化为少数几个基本命题,1640 年完成著作《圆锥曲线论》,不久失传,后于 1779 年被重新发现.在射影几何方面他最突出的成就是所谓的帕斯卡定理:圆锥曲线的内接六边形对边交点共线.

对早期射影几何学有所贡献的还有画家出身的拉伊尔(P.de La Hire,1640—1718),他在这方面的工作也是受到德沙格的影响.他在其射影几何专著《圆锥曲线》(1685) 中首先证明了有关调和点组的圆的性质,再通过投影和取截影,将这些性质推广到圆锥曲线上,证明了阿波罗尼奥斯的 364 个关于圆锥曲线的定理中的 300 个.其结果并未超过德沙格与帕斯卡的工作,最突出的地方在于极点理论方面有所创新,获得并且证明了这样的命题:若一点 Q 在直线 p 上移动,则该点 Q 的极带将绕直线 p 的极点 P 转动.

德沙格等人把这种投影分析方法和所获得的结果,视为欧几里得

几何的一部分,从而在17世纪人们对二者不加区别.但我们应该认识到,当时由于这一方法而诱发了一些新的思想和观点:

(1) 一个数学对象从一个形状连续变化到另一形状;

(2) 变换与变换不变性;

(3) 几何新方法 —— 仅关心几何图形的相交与结构关系,不涉及度量.

不过17世纪数学家们的时尚是理解自然和控制自然,用代数方法处理数学问题一般更为有效,也特别容易获得实践所需的定量结果.而射影几何学家的方法是综合的,而且得出的结果也是定性的,不那么有用.因此,射影几何产生后不久,很快就让位于代数、解析几何和微积分,终由这些学科进一步发展出在近代数学中占中心地位的其他学科.德沙格、帕斯卡、拉伊尔等人的工作与结果也渐被人们所遗忘,迟至19世纪才又被人们重新发现.

5.2.4 计算技术与对数

16世纪前半叶,欧洲人像印度人和阿拉伯人一样,把实用的算术计算放在数学的首位.这是因为科学成果在工程技术上的应用以及实践上的需要,要求得出数量上的结果;地理探险与海洋贸易需要更为准确的天文知识;以精确观测为基础的新天文学需要精密的天文数表,特别是三角函数表;日益发展起来的银行业务和商务活动也需要更好的计算技术,所有这些都对计算技术的改进提出了前所未有的要求.1585年荷兰数学家史蒂文发表的《十进算术》(La Disme)系统地探讨了十进制记数及其运算理论,并提倡用十进制小数来书写分数,还建议度量衡及币制中也广泛采用十进制.这种十进制的采用又为计算技术的改进准备了必要条件.

这一时期计算技术最大的改进是对数的发明和应用,它的产生主要是由于天文和航海计算的强烈需要.为简化天文、航海方面所遇到的繁杂数值计算,自然希望将乘除法归结为简单的加减法,这种设想受到人们熟知的三角公式

$$\sin A\sin B = \frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2}$$

的启示,或许还受到德国数学家斯蒂弗尔(M. Stifel, 约 1487—1567) 在他的《综合算术》(1544) 中所发现的几何级数

$$1,\quad r,\quad r^2,\quad r^3,\quad \cdots$$

与其指数构成的算术级数 0,1,2,3,⋯ 之间对应关系及运算性质的启示.

苏格兰贵族数学家纳皮尔(J. Napier, 1550—1617) 正是在球面天文学的三角学研究中首先发明对数方法的. 1614 年他在题为《奇妙的对数定理说明书》的小书中,阐述了他的对数方法. 他考察一个点 P 沿直线 AB(长度为 10^7 单位) 的运动,其速度在每一点 P 处正比于剩余距离 $PB = y$;再假定另一个点 Q 沿无限直线 CD 匀速运动,其速度等于 P 点在 A 处的速度,$CQ = x$;令 P 与 Q 同时分别从 A、C 出发(如图 5.8),那么定义 x 是 y 的对数.



图 5.7　纳皮尔

纳皮尔最初让 x 和 y 这两组数是按公式

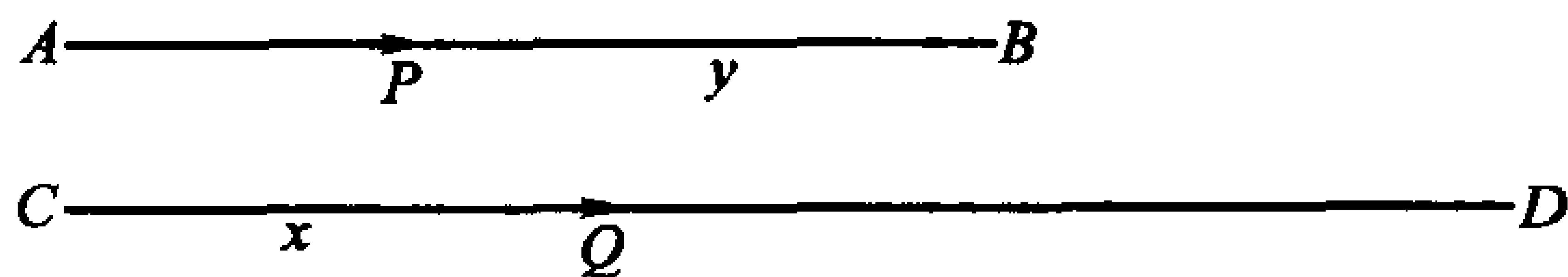


图 5.8

$y = a\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x}{a}}$ 对应,其中 $a = 10^7$, e是自然对数的底,当 $x = x_1 + x_2$ 时,并不能得到 $y = y_1y_2$,而是得到 $y = \frac{y_1y_2}{a}$. 纳皮尔的目的是想用对数解决平面和球面三角问题,因此他制作了以分弧为间隔的 0° ~ 90° 角正弦的对数表.

对数的实用价值很快为纳皮尔的朋友、伦敦格雷沙姆学院几何学教授布里格斯(H. Briggs, 1561—1631) 所认识,他与纳皮尔合作,决定采用 $y = 10^x$,则 $x = x_1 + x_2$ 时得到 $y = y_1y_2$,这样,就获得了今天所

谓的"常用对数".由于我们的数系是十进制的,从而它在数值计算上具有优越性.他的《对数算术》(1624)编制了1～2000以及90 000～100 000的14位常用对数表.

瑞士仪器工匠比尔吉(J. Bürgi,1552—1632)1600年也独立地发明了对数方法以简化天文计算.他的出发点是斯蒂弗尔的级数的对应思想,属于算术性质而略异于纳皮尔的做法.不过他的发明迟至1620年才得到发表.

对数的发明大大减轻了计算工作量,很快风靡欧洲,所以拉普拉斯曾赞誉道:"对数的发明以其节省劳力而延长了天文学家的寿命".可以说,到16世纪末、17世纪初,整个初等数学的主要内容基本定型,文艺复兴促成的东西方数学的融合,为近代数学的兴起及以后的惊人发展铺平了道路.

5.3 解析几何的诞生

近代数学本质上可以说是变量数学.文艺复兴以来资本主义生产力的发展,对科学技术提出了全新的要求:机械的普遍使用引起了对机械运动的研究;世界贸易的高涨促使航海事业的空前发达,而测定船舶位置问题要求准确地研究天体运行的规律;武器的改进刺激了弹道问题的探讨,等等,总之,到了16世纪,对运动与变化的研究已变成自然科学的中心问题.这就迫切地需要一种新的数学工具,从而导致了变量数学亦即近代数学的诞生.

变量数学的第一个里程碑是解析几何的发明.解析几何的基本思想是在平面上引进所谓"坐标"的概念,并借助这种坐标在平面上的点和有序实数对(x,y)之间建立一一对应的关系.每一对实数(x,y)都对应于平面上的一个点;反之,每一个点都对应于它的坐标(x,y).以这种方式可以将一个代数方程$f(x,y)=0$与平面上一条曲线对应起来,于是几何问题便可归结为代数问题,并反过来通过代数问题的研究发现新的几何结果.

借助坐标来确定点的位置的思想古代曾经出现过,古希腊的阿波

罗尼奥斯关于圆锥曲线性质的推导，阿拉伯人通过圆锥曲线交点求解三次方程的研究，都蕴涵着这种思想.解析几何最重要的前驱是法国数学家奥雷斯姆(N. Oresme, 1323?—1382)，他在《论形态幅度》这部著作中提出的形态幅度原理(或称图线原理)，甚至已接触到函数的图象表示，在这里，奥雷斯姆借用了"经度"、"纬度"这两个地理学术语来描述他的图线，相当于横坐标与纵坐标.不过他的图线概念是模糊的，至多是一种图表，还未形成清晰的坐标与函数图象的概念.

解析几何的真正发明还要归功于法国另外两位数学家笛卡儿(R. Descartes, 1596—1650)与费马(P. de Fermat, 1601—1665).他们工作的出发点不同，但却殊途同归.

笛卡儿1637年发表了著名的哲学著作《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》(Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences, 1637)，该书有三个附录:《几何学》、《屈光学》和《气象学》，解析几何的发明包含在《几何学》这篇附录中.笛卡儿的出发点是一个著名的希腊数学问题——帕波斯问题:

设在平面上给定3条直线 l_1、l_2 和 l_3，过平面上的点 C 作三条直线分别与 l_1、l_2、l_3 交于点 P、R、Q，交角分别等于已知角 α_1、α_2 和 α_3，求使 $CP \cdot CR = kCQ^2$ 的点 C 的轨迹；如果给定4条直线(如图5.9)，则求使 $\dfrac{CP \cdot CR}{CQ \cdot CS} = k$ (k 为常数)的点 C 的轨迹.

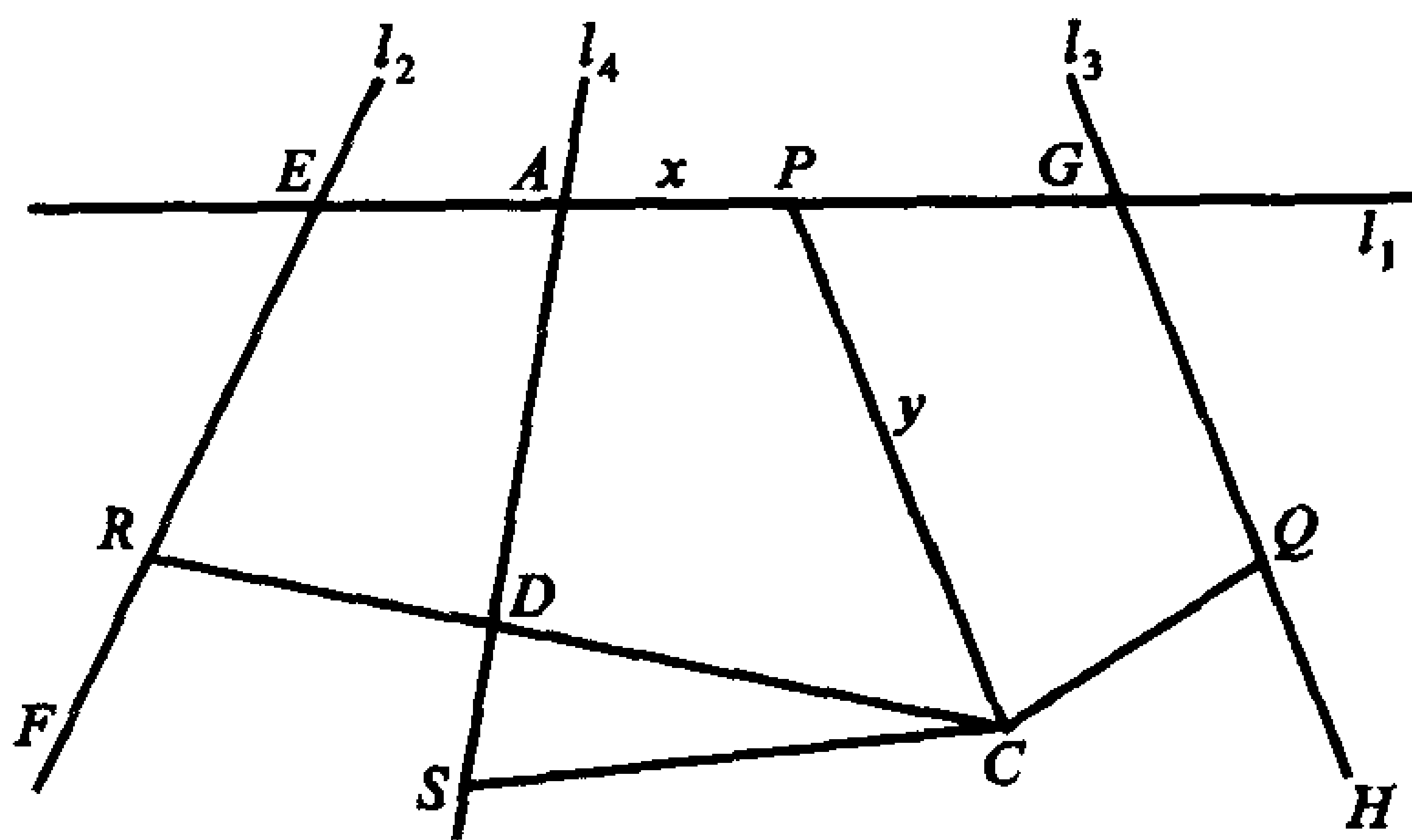


图5.9

问题还可以类似地推广到 n 条直线的情形. 帕波斯曾宣称,当给定的直线是三条或四条(即所谓三线或四线问题)时,所得的轨迹是一条圆锥曲线. 笛卡儿在《几何学》第二卷中,证明了四线问题的帕波斯结论. 他的做法是这样的:记 AP 为 x,PC 为 y,经简单的几何分析,他用已知量表出 CR、CQ 和 CS 的值,代入 $CP \cdot CR = CS \cdot CQ$(设 $k = 1$),就得到一个关于 x 和 y 的二次方程:

$$y^2 = Ay + Bxy + Cx + Dx^2, \qquad (*)$$

其中 A、B、C、D 是由已知量组成的简单代数式. 于是他指出,任给 x 一个值,就得到一个关于 y 的二次方程,从这个方程可以解出 y,并根据他在《几何学》第一卷中所给的方法,用圆规直尺将 y 画出. 如果我们取无穷多个 x 值,就得到无穷多个 y 值,从而得到无穷多个点 C,所以这些点 C 的轨迹就是方程(*)代表的曲线. 在这个具体的问题中,笛卡儿选定一条直线(AG)作为基线(相当于一根坐标轴),以点 A 为原点,x 值是基线的长度,从 A 点量起;y 值是另一条线段的长度,该线段从基线出发,与基线交成定角. 正是如此,笛卡儿建立了历史上第一个倾斜坐标系. 在《几何学》第三卷中,我们还可以看到笛卡儿也给出了直角坐标系的例子.

有了坐标系和曲线方程的思想,笛卡儿又提出了一系列新颖的想法,如:曲线的次数与坐标轴选择无关;坐标轴选取应使曲线方程尽量简单;利用曲线的方程表示来求两条不同曲线的交点;曲线的分类等等.

《几何学》作为笛卡儿哲学著作《方法论》的附录,意味着他的几何学发现乃至其他方面的发现都是在其方法论原理指导下获得的. 笛卡儿方法论原理的本旨是寻求发现真理的一般方法,他在另一部较早的哲学著作《指导思维的法则》中称自己设想的一般方法为"通用数学"(mathesis universalis),并概述了这种通用数学的思路. 在这里,笛卡儿提出了一种大胆的计划,即:

任何问题 → 数学问题 → 代数问题 → 方程求解 .

为了实施这一计划,笛卡儿首先通过"广延"(extension)(他对有形物广延的一种推广)的比较,将一切度量问题化为代数方程问题,为此需要

确定比较的基础,即定义"广延"单位,以及建立"广延"符号系统及其算术运算,特别是要给出算术运算与几何图形之间的对应.这就是笛卡儿几何学的方法论背景.

当然,笛卡儿的方法论著作并没有告诉人们,在将一切问题化归为代数方程问题后将如何继续,这正是《几何学》需要完成的任务.《几何学》开宗明义,在任意选取单位线段(广延单位)的基础上定义了线段的加、减、乘、除、乘方、开方等运算.他以特殊的字母符号($a,b,c,\cdots$)(广延符号系统)来表示线段,由于他可用线段表示积、幂,这样就突破了"齐次性"的束缚,而在几何中自由运用算术或代数术语.运用这些算术术语又可以将一切几何问题化为关于一个未知线段的单个代数方程:

$$
\begin{aligned}
z &= b\\
z^2 &= -az+b\\
z^3 &= -az^2+bz+c\\
z^4 &= -az^3+bz^2+cz+d\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

《几何学》的主要篇幅或者说主要目标就是讨论如何给出这些方程的标准解法(由线段作图画出).笛卡儿依下列次序对这一问题进行分类解答:

(1) 一、二次方程;

(2) 三、四次方程;

(3) 五、六次方程;

⋮

他在《几何学》第一卷中从最简单的第(1)类方程出发,这相应于只用尺规作图的所谓"普通几何"问题.讨论了三种形式的二次方程:

$$z^2 = az+b^2$$

$$z^2 = -az+b^2$$

$$z^2 = az-b^2$$

并分别给出作图(解),本质上它是利用了圆与直线的交点.以 $z^2 = az$

$+ b^2$ 为例,笛卡儿作一直角三角形 NLM,使其一边 $LM = b$,另一边 $LN = \frac{a}{2}$,延长斜边 MN 至 O,使 $NO = NL$,则 OM 即为所求线段 z(如图 5.10).

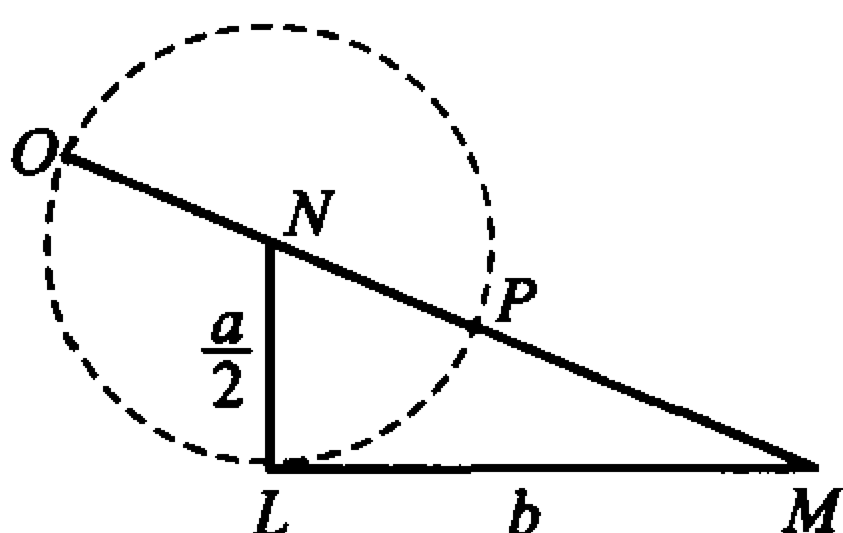


图 5.10

为了接着讨论三次及三次以上方程的作图,就需要研究曲线的性质与分类,这就引出了作为《几何学》第二卷与第三卷前半部分的一个很长的过渡,其中包括了使他成为近代数学先驱的坐标几何.然而对笛卡儿本人来说,所有这些都不过是为了达到他的最终目标 —— 高次方程作图所作的准备.在这个很长的过渡之后,笛卡儿在《几何学》第三卷的后半部分,又回到他的主题 —— 高次方程的标准作图,利用刚得到的坐标几何工具,解决了三、四次方程的作图(利用圆与抛物线的交点)和五、六次方程的作图(利用圆与比抛物线更高一次的所谓"笛卡儿抛物线"的交点),并指出,可以依此类推地解决更高次方程的作图问题.

我们看到,笛卡儿《几何学》的整个思路与传统的方法大相径庭,在这里表现出笛卡儿向传统和权威挑战的巨大勇气.笛卡儿在《方法论》中尖锐地批判了经院哲学特别是被奉为教条的亚里士多德"三段论"法则,认为三段论法则"只是在交流已经知道的事情时才有用,却不能帮助我们发现未知的事情".他认为"古人的几何学"所思考的只限于形相,而近代的代数学则"太受法则和公式的束缚",因此他主张"采取几何学和代数学中一切最好的东西,互相取长补短."这种怀疑传统与权威、大胆思索创新的精神,反映了文艺复兴时期的时代特征.笛卡儿的哲学名言是:"我思故我在".他解释说:"要想追求真理,我们必须在一生中尽可能地把所有的事物都来怀疑一次",而世界上唯一先

需怀疑的是"我在怀疑",因为"我在怀疑"证明"我在思想",说明我确实存在,这就是"我思故我在",成为笛卡儿唯理主义的一面旗帜.它虽然在物质与精神的关系上有所颠倒,但主张用怀疑的态度代替盲从和迷信,认为只有依靠理性才能获得真理.在当时不仅打击了经院哲学的教会权威,而且也为笛卡儿自己的科学发现开辟了一条崭新的道路.

笛卡儿出生于法国都伦的拉哈耶,贵族家庭的后裔,父亲是一个律师.他早年受教于拉福累歇的耶稣会学校.1612年赴巴黎从事研究,曾于1617年和1619年两次从军,离开军营后,旅行于欧洲,他的学术研究是在军旅和旅行中作出的.



图 5.11　笛卡儿诞生400周年纪念邮票(1996年,法国)

关于笛卡儿创立解析几何的灵感有几个传说.一个传说讲,笛卡儿终身保持着在耶稣会学校读书期间养成的"晨思"习惯,他在一次"晨思"时,看见一只苍蝇正在天花板上爬,他突然想到,如果知道了苍蝇与相邻两个墙壁的距离之间的关系,就能描述它的路线,这使他头脑中产生了关于解析几何的最初闪念.另一个传说是,1619年冬天,笛卡儿随军队驻扎在多瑙河畔的一个村庄,在圣马丁节的前夕(11月10日),他做了三个连贯的梦.笛卡儿后来说正是这三个梦向他揭示了"一门奇特的科学"和"一项惊人的发现",虽然他从未明说过这门奇特的科学和这项惊人的发现是什么,但这三个梦从此成为后来每本介绍解析几何的诞生的著作必提的佳话,它给解析几何的诞生蒙上了一层神秘色彩.人们在苦心思索之后的睡梦中获得灵感与启示不是不可能的.但事实上笛卡儿之所以能创立解析几何,主要是他艰苦探索、潜心思考,运用科学的方法,同时批判地继承前人的成就的结果.

与笛卡儿不同,费马工作的出发点是竭力恢复失传的阿波罗尼奥斯的著作《论平面轨迹》,他为此而写了一本题为《论平面和立体的轨迹引论》(1629)的书.书中清晰地阐述了费马的解析几何原理,指出:"只要在最后的方程中出现两个未知量,我们就有一条轨迹,这两个量之一的末端描绘出一条直线或曲线.直线只有一种,曲线的种类则是无限

的,有圆、抛物线、椭圆等等”(如图 5.12). 费马在书中还提出并使用了坐标的概念,不仅使用了斜坐标系,也使用直角坐标系,他所称的未知量 A、E 实际就是“变量”,也就是我们今天所称的横坐标与纵坐标.

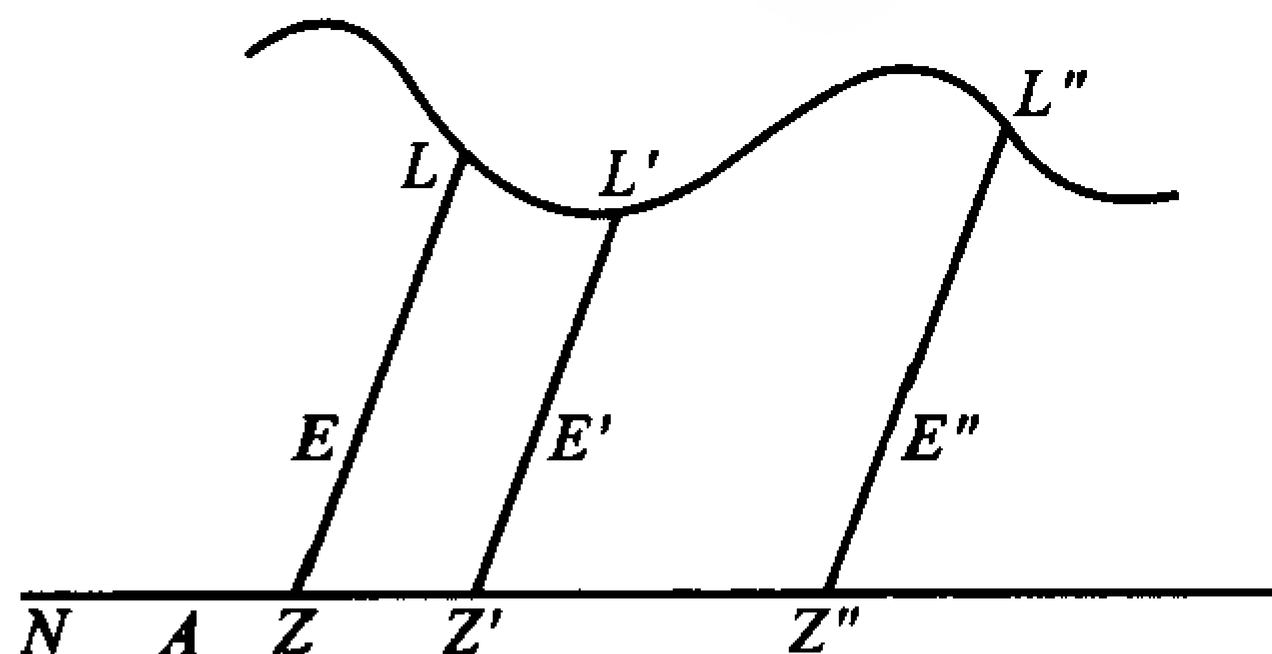


图 5.12

书中费马解析地定义了以下的曲线:

直线方程:$d(a-x)=by$;

圆:$b^2-x^2=y^2$;

椭圆:$b^2-x^2=ky^2$;

抛物线:$x^2=dy, y^2=dx$;

双曲线:$xy=k^2; x^2+b^2=ky^2$;

费马后来还定义了新曲线:

$x^m y^n=a, y^n=ax^m$ 和 $r^n=av$.

费马没有说明他的解析几何思想是如何形成的.我们可以认为,他与笛卡儿的创造都是文艺复兴以来欧洲代数学振兴所带来的必然结果.

微积分的创立

6

解析几何是代数与几何相结合的产物，它将变量引进了数学，使运动与变化的定量表述成为可能，从而为微积分的创立搭起了舞台.

微积分的思想萌芽，特别是积分学，部分可以追溯到古代.我们已经知道，面积和体积的计算自古以来一直是数学家们感兴趣的课题，在古代希腊、中国和印度数学家们的著述中，不乏用无限小过程计算特殊形状的面积、体积和曲线长的例子.前面已经介绍过阿基米德、刘徽和祖冲之父子等人的方法，他们的工作，确实是人们建立一般积分学的漫长努力的先驱.

与积分学相比而言，微分学的起源则要晚得多.刺激微分学发展的主要科学问题是求曲线的切线、求瞬时变化率以及求函数的极大极小值等问题.古希腊学者曾进行过作曲线切线的尝试，如阿基米德《论螺线》中给出过确定螺线在给定点处的切线的方法；阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》中讨论过圆锥曲线的切线，等等.但所有这些都是基于静态的观点，把切线看作是与曲线只在一点接触且不穿过曲线的“切触线”而与动态变化无干.古代与中世纪中国学者在天文历法研究中曾涉及到天体运动的不均匀性及有关的极大、极小值问题，如郭守敬《授时历》中求“月离迟疾”(月亮运行的最快点和最慢点)、求月亮白赤道交点与黄赤道交点距离的极值(郭守敬甚至称之为“极数”)等问题，但东方学者以惯用的数值手段(“招差术”，即有限差分计算)来处理，从而回避了连续变化率.总之，在17世纪以前，真正意义上的微分学研究的例子

可以说是很罕见的.

6.1　半个世纪的酝酿

近代微积分的酝酿,主要是在17世纪上半叶这半个世纪.为了理解这一酝酿的背景,我们首先来略微回顾一下这一时期自然科学的一般形势和天文、力学等领域发生的重大事件.

首先是1608年,荷兰眼镜制造商里帕席发明了望远镜,不久伽利略将他制成的第一架天文望远镜对准星空而作出了令世人目不暇接、惊奇不已的天文发现.望远镜的发明不仅引起了天文学的新高涨,而且推动了光学的研究.

1619年,开普勒公布了他的最后一条行星运动定律.开普勒行星运动三大定律要意是:

Ⅰ.行星运动的轨道是椭圆,太阳位于该椭圆的一个焦点;

Ⅱ.由太阳到行星的矢径在相等的时间内扫过的面积相等;

Ⅲ.行星绕太阳公转周期的平方,与其椭圆轨道的半长轴的立方成正比.

开普勒主要是通过观测归纳出这三条定律.从数学上推证开普勒的经验定律,成为当时自然科学的中心课题之一.

1638年,伽利略(Galileo Galilei,1564—1642)《关于两门新科学的对话》出版.伽利略建立了自由落体定律、动量定律等,为动力学奠定了基础;他认识到弹道的抛物线性质,并断言炮弹的最大射程应在发射角为45°时达到,等等.伽利略本人竭力倡导自然科学的数学化,他的著作激起了人们对他所确立的动力学概念与定律作精确的数学表述的巨大热情.

凡此一切,标志着自文艺复兴以来在资本主义生产力刺激下蓬勃发展的自然科学开始迈入综合与突破的阶段,而这种综合与突破所面临的数学困难,使微分学的基本问题空前地成为人们关注的焦点:确定非匀速运动物体的速度与加速度使瞬时变化率问题的研究成为当务之急;望远镜的光程设计需要确定透镜曲面上任一点的法线,这又使求任

意曲线的**切线问题**变得不可回避;确定炮弹的最大射程及寻求行星轨道的近日点与远日点等涉及的**函数极大值、极小值问题**也亟待解决.与此同时,行星沿轨道运动的路程、行星矢径扫过的面积以及物体重心与引力的计算等又使积分学的基本问题——**面积、体积、曲线长、重心和引力计算**的兴趣被重新激发起来.在17世纪上半叶,几乎所有的科学大师都致力于寻求解决这些难题的新的数学工具,特别是描述运动与变化的无限小算法,并且在相当短的时期内,取得了迅速的进展.以下介绍在微积分酝酿阶段最有代表性的工作.

(一)开普勒与旋转体体积

德国天文学家、数学家开普勒(Johannes Kepler,1571—1630)在1615年发表《测量酒桶的新立体几何》,论述了求圆锥曲线围绕其所在平面上某直线旋转而成的立体体积的积分法.开普勒方法的要旨,是用无数个同维无限小元素之和来确定曲边形的面积及旋转体的体积.例如他认为球的体积是无数个小圆锥的体积的和,这些圆锥的顶点在球心,底面则是球面的一部分;他又把圆锥看成是极薄的圆盘之和,并由此计算出它的体积,然后进一步证明球的体积是半径乘以球面面积的三分之一$\left(V = R \times 4\pi R^2 \times \frac{1}{3}\right)$.

开普勒考虑的另一个例子是由半径为R的圆围绕其所在平面上的与圆心距离为d的垂直轴旋转而形成的圆环,他证明这个圆环的体积等于该圆的面积与圆心经过的路程之积:

$$V = (\pi R^2)(2\pi d) = 2\pi^2 R^2 d$$

他推导这一公式的办法是:用通过旋转轴的平面把圆环分成无穷多个内侧较薄、外侧较厚的垂直薄圆片(图6.1),而把每一个薄圆片又分成无穷多个横截面为梯形的水平薄片.先推导出每个圆片的体积是$\pi R^2 l$,其中$l = \frac{l_1 + l_2}{2}$是圆片最小厚度l_1与最大厚度l_2的平均值,亦即圆片在其中

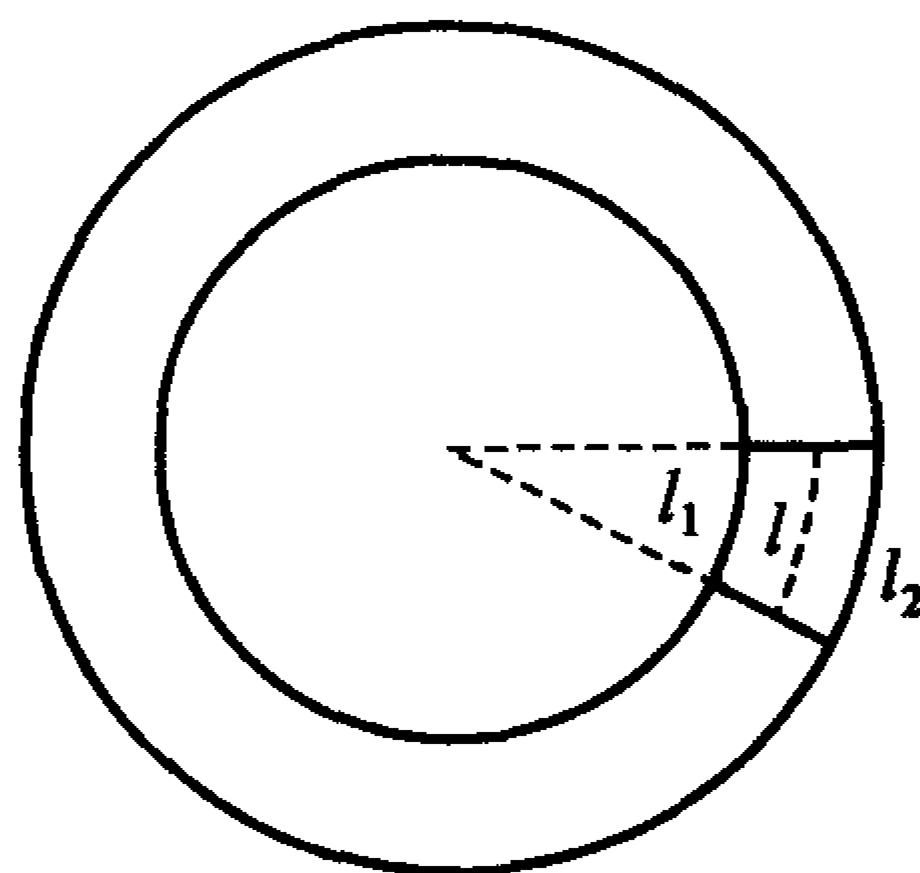


图6.1

心处的厚度. 然后他进一步推算 $V = (\pi R^2)(\sum l) = (\pi R^2)(2\pi d)$.

(二) 卡瓦列里不可分量原理

意大利数学家卡瓦列里(Bonaventura Cavalieri, 1598—1647) 在其著作《用新方法促进的连续不可分量的几何学》(1635) 中发展了系统的不可分量方法. 卡瓦列里认为线是由无限多个点组成; 面是由无限多条平行线段组成; 立体则是由无限多个平行平面组成. 他分别把这些元素叫做线、面和体的"不可分量"(indivisible). 他建立了一条关于这些不可分量的普遍原理, 后以"卡瓦列里原理" 著称:

两个等高的立体, 如果它们的平行于底面且离开底面有相等距离的截面面积之间总有给定的比, 那么这两个立体的体积之间也有同样的比.

卡瓦列里利用这条原理计算出许多立体图形的体积. 然而他对积分学创立最重要的贡献还在于, 他后来(1639) 利用平面上的不可分量原理建立了等价于下列积分

$$\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

的基本结果, 使早期积分学突破了体积计算的现实原型而向一般算法过渡.

卡瓦列里考虑一平行四边形内线段的幂和与组成它的三角形内线段的幂和之间的关系. 如图 6.2, 在平行四边形 $ACDF$ 中, $AF = a$, 其内任一平行于 AF 的截线 GE 被对角线分成两部分 $GH = x$, $HE = y$.

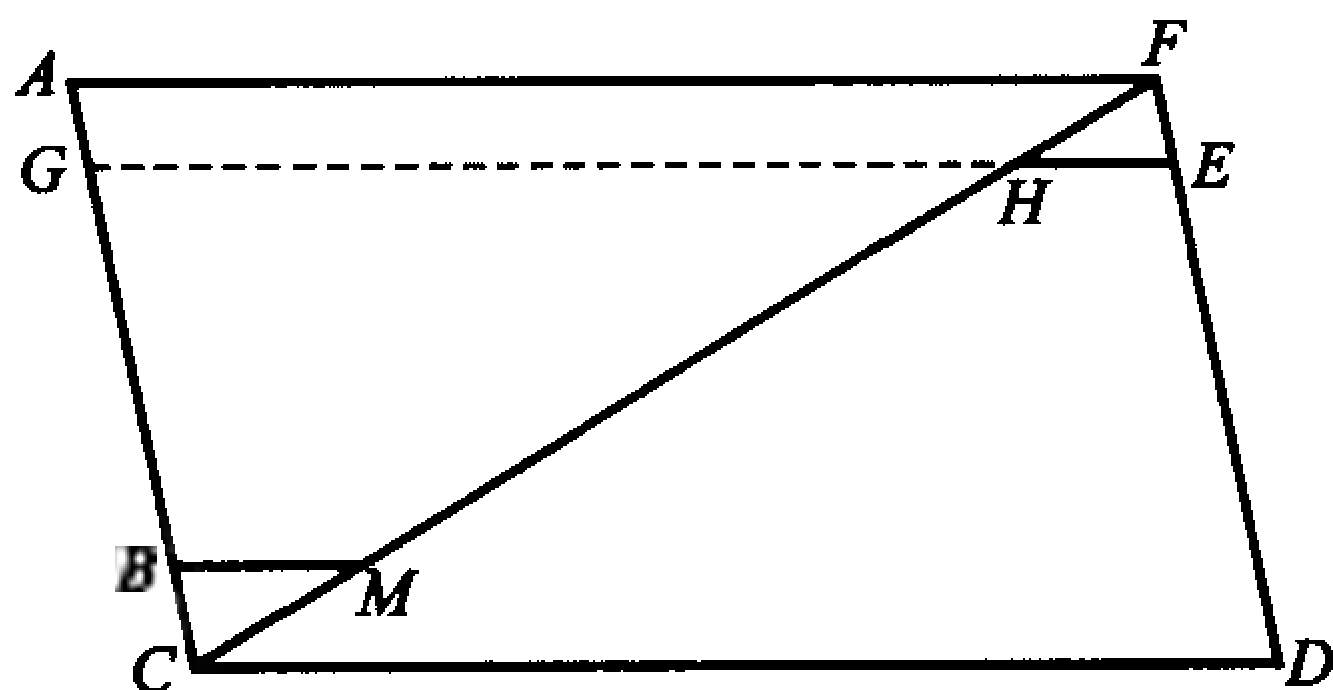


图 6.2

先讨论一次幂和的关系. 因 $x+y=a$,故 $\sum_C^A a=\sum_C^A(x+y)=\sum_C^A x+\sum_C^A y=2\sum_C^A x$(利用对称性),因此 $\sum_C^A x=\frac{1}{2}\sum_C^A a$. 按卡瓦列里的不可分量观点,$\sum_C^A x$ 应为 ΔCAF 的面积,$\sum_C^A a$ 则为 $\square ACDF$ 的面积. 取正方形情形,就得到 $\sum_C^A x=\frac{1}{2}a^2$,亦即

$$\int_0^a x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a^2.$$

接着考虑 $\sum a^2$、$\sum a^3$ 和 $\sum a^4$ 等. 例如 $\sum a^3$,我们有 $\sum a^3=\sum(x+y)^3=\sum x^3+3\sum x^2y+3\sum xy^2+\sum y^3$,利用对称性得

$$\sum a^3=2\sum x^3+6\sum x^2y. \qquad (*)$$

另一方面,

$$\sum a^3=a\sum a^2=a\sum(x+y)^2=a\sum x^2+2a\sum xy+a\sum y^2.$$

但卡瓦列里在此前已得到

$$\sum x^2=\sum y^2=\frac{1}{3}\sum a^2,$$

因此

$$\begin{aligned}\sum a^3&=\frac{2}{3}a\sum a^2+2a\sum xy\\&=\frac{2}{3}\sum a^3+2(x+y)\sum xy\\&=\frac{2}{3}\sum a^3+2\sum x^2y+2\sum xy^2\\&=\frac{2}{3}\sum a^3+4\sum x^2y.\end{aligned}$$

也就是说 $\sum x^2y=\frac{1}{12}\sum a^3$,代入前面的结果(*),得

$$\sum a^3=2\sum x^3+\frac{1}{2}\sum a^3$$

或

$$\sum a^3 = 4\sum x^3.$$

取正方形情形就得到了$\sum x^3 = \frac{1}{4}\sum a^3 = \frac{1}{4}a^4$,即

$$\int_0^a x^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}a^4.$$

卡瓦列里使用类似方法一直推到了公式$\sum x^9 = \frac{a^{10}}{10}$.他还利用这方面的结果,计算出在单位区间[0,1]上,曲线$y = x^n$(n为正整数)下的图形的面积$A = \sum x^n = \frac{1}{n+1}$,以及将这个图形绕$x$轴旋转所得的旋转体的体积$V = \pi\sum x^{2n} = \frac{\pi}{2n+1}$.这些都说明卡瓦列里的不可分量方法比他的前人包括开普勒所使用的方法更接近于普遍的积分学算法,因而也具有更大的威力.开普勒曾向他的同行们提出一个挑战问题:求抛物线弓形绕弦旋转而成的旋转体体积.卡瓦列里用自己的方法解决了开普勒的问题.

在卡瓦列里发表其不可分量著作以后的20年间,其他一些数学家也陆续推进了不可分量方法,并从不同的角度得出

$$\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

这一基本公式.这些数学家包括托利拆里(E. Torricelli,1608—1647)、罗伯瓦尔(G. P. Roberval,1602—1675)、费马、帕斯卡和沃利斯.

(三)笛卡儿"圆法"

以上介绍的微积分准备阶段的工作,主要采用几何方法并集中于积分问题.解析几何的诞生改变了这一状况.解析几何的两位创始人笛卡儿和费马,都是将坐标方法引进微分学问题研究的前锋.笛卡儿在《几何学》中提出了求切线的所谓"圆法",本质上是一种代数方法.

求曲线$y = f(x)$过点$P(x, f(x))$的切线,笛卡儿的方法是首先确定曲线在点P处的法线与x轴的交点C的位置,然后作该法线的过

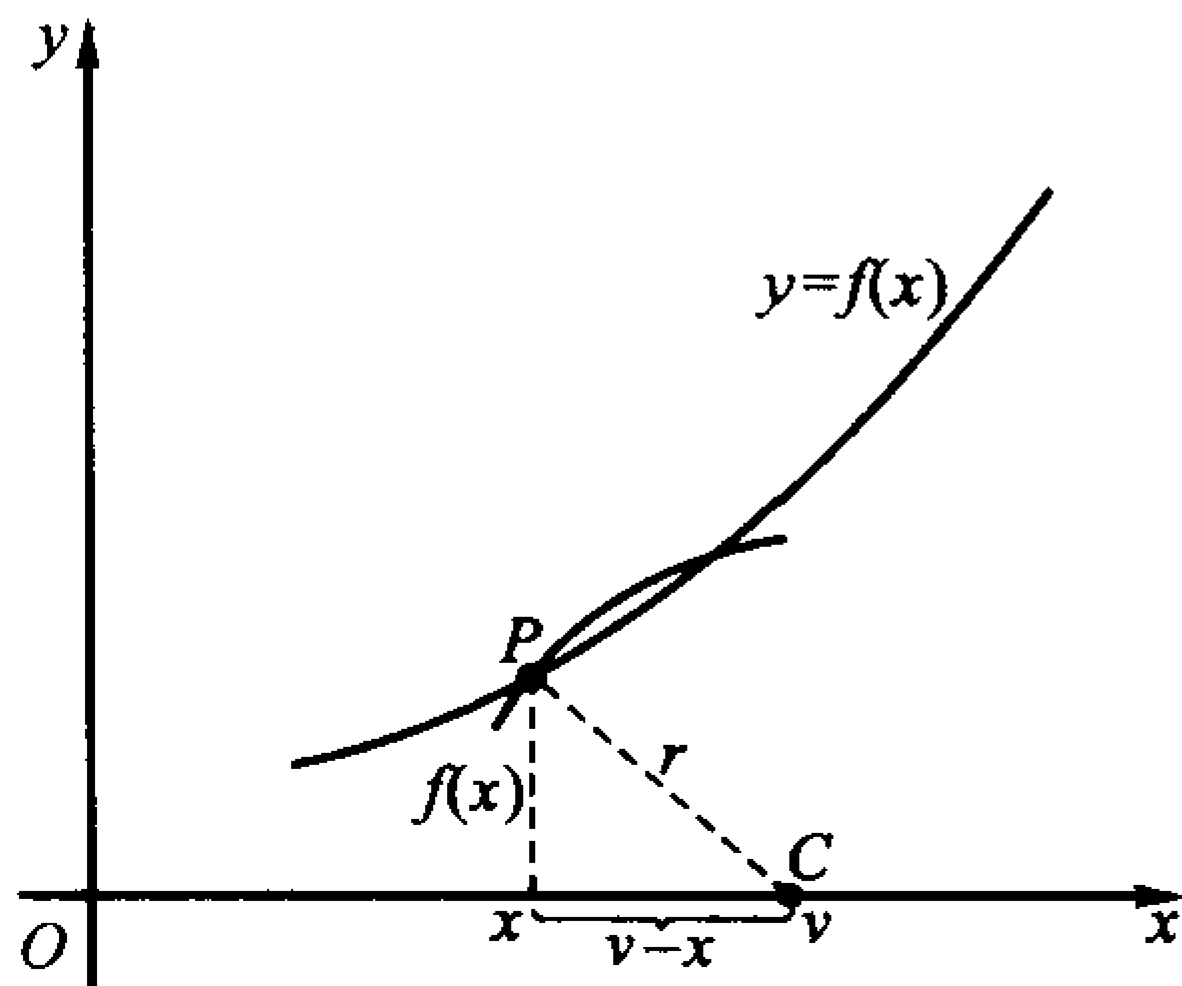


图 6.3

点 P 的垂线，便可得到所求的切线.

如图 6.3，过 C 点作半径为 $r = CP$ 的圆，因 CP 是曲线 $y = f(x)$ 在 P 点处的法线，那么点 P 应是该曲线与圆 $y^2 + (x - v)^2 = r^2$ 的"重交点"(在一般情况下所作圆与曲线还会相交于 P 点附近的另一点). 如果 $[f(x)]^2$ 是多项式，有垂交点就相当于方程

$$[f(x)]^2 + (v - x)^2 = r^2$$

将以 P 点的横坐标 x 为重根. 但具有重根 $x = e$ 的多项式的形式必须是 $(x - e)^2 \cdot \sum c_i x^i$，笛卡儿把上述方程有重根的条件写成：

$$[f(x)]^2 + (v - x)^2 - r^2 = (x - e)^2 \sum c_i x^i,$$

然后用比较系数法求得 v 与 e 的关系. 代入 $e = x$，就得到用 x 表示的 v，这样过点 P 的切线的斜率就是

$$\frac{v - x}{f(x)}.$$

以抛物线 $y^2 = kx$ 为例，$y = f(x) = \sqrt{kx}$，方程

$$kx + (v - x)^2 = r^2$$

有重根的条件为

$$kx + (v - x)^2 - r^2 = (x - e)^2.$$

令 x 的系数相等，得 $k - 2v = -2e$，即 $v = e + \frac{1}{2}k$. 代入 $e = x$，于是次法距 $v - x = \frac{1}{2}k$，求出抛物线过点 $(x, \sqrt{kx})$ 的切线斜率是

$$\frac{v-x}{f(x)}=\frac{k/2}{\sqrt{kx}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{x}}.$$

笛卡儿的代数方法在推动微积分的早期发展方面有很大的影响，牛顿就是以笛卡儿圆法为起跑点而踏上研究微积分的道路的.

笛卡儿圆法在确定重根时会导致极繁复的代数计算，1658 年荷兰数学家胡德(J. Hudde)提出了一套构造曲线切线的形式法则，称为“胡德法则”. 胡德法则为确定笛卡儿圆法所需的重根提供了机械的算法，可以完成求任何代数曲线的切线斜率时所要进行的计算.

(四) 费马求极大值与极小值的方法

笛卡儿圆法记载于他 1637 年发表的《几何学》中. 就在同一年，费马在一份手稿中提出了求极大值与极小值的代数的方法.

按费马的方法，设函数 $f(x)$ 在点 a 处取极值，费马用 $a+e$ 代替原来的未知量 a，并使 $f(a+e)$ 与 $f(a)$“逼近”(adequatio)，即

$$f(a+e)\sim f(a),$$

消去公共项后，用 e 除两边，再令 e 消失，即

$$\left[\frac{f(a+e)-f(a)}{e}\right]_{e=0}=0,$$

由此方程求得的 a 就是 $f(x)$ 的极值点.

例如，费马用他的方法来确定怎样把长度为 b 的一个线段划分为两个线段 x 和 $b-x$，使得它们的乘积 $x(b-x)=bx-x^2$ 最大(也就是作一个周长为 $2b$ 的长方形，使其面积最大). 首先用 $x+e$ 代替 x，然后写出

$$b(x+e)-(x+e)^2\sim bx-x^2,$$

即 $bx+be-x^2-2xe-e^2\sim bx-x^2$，消去相同项得

$$be-2xe-e^2\sim 0,$$

两边除以 e，得

$$b-2x-e\sim 0,$$

令 $e=0$，得 $b-2x=0$，即有

$$x=\frac{b}{2}.$$

费马的方法几乎相当于现今微分学中所用的方法，只是以符号 e(他写作 E) 代替了增量 Δx.

记载费马求极大值与极小值方法的这份手稿，实际上是他写给梅森(M. Mersenne) 的一封信，梅森是当时欧洲科学界领头人物伽利略、费马、笛卡儿、帕斯卡等人之间保持书信交往的中心. 他将费马这封信转给了笛卡儿，从而引起了关于切线问题的热烈争论，因为费马求极大极小值的方法也可以用来求曲线的切线，他在致梅森的信中就收入了怎样用他的方法来求抛物线 $y = x^2$ 在给定点的切线的例子. 费马在信中指出他求函数极大值、极小值的方法还"可以推广应用于一些优美的问题"，并说他已经获得了求平面与立体图形的重心等一些其他结果，"关于这些结果，如果时间允许，我将在另外的场合来论述."

(五) 巴罗"微分三角形"

巴罗(Isaac Barrow, 1630—1677) 也给出了求曲线切线的方法，他的方法记载在 1669 年出版的《几何讲义》中，但他应该是在更早的时候就得到了这种方法.

与笛卡儿、费马不同，巴罗使用了几何法. 巴罗几何法的关键概念后来变得很有名，就是"微分三角形"，也叫"特征三角形". 如图 6.4 所示，设有曲线 $f(x, y) = 0$，欲求其上一点 P 处的切线. 巴罗考虑一段"任意小的弧" $\widehat{PQ}$，它是由增量 $QR = e$ 引起的. PQR 就是所谓的微分三角形. 巴罗认为当这个三角形越来越小时，它与 ΔTPM 应趋近于相似，故应有

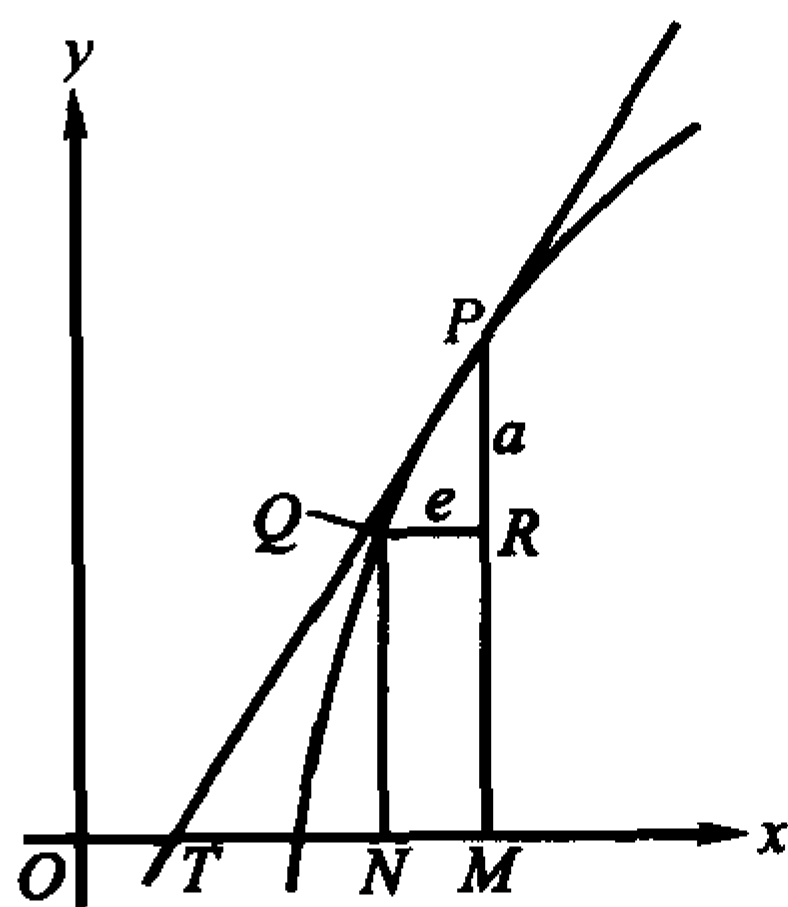


图 6.4

$$\frac{PM}{TM} = \frac{PR}{QR} \quad 即 \quad \frac{y}{t} = \frac{a}{e},$$

因 Q、P 在曲线上，故应有

$$f(x - e, y - a) = f(x, y) = 0,$$

在上式中消去一切包含有 e, a 的幂或二者乘积的项，从所得方程中解出 $\frac{a}{e}$，即切线斜率 $\frac{y}{t}$，于是可得到 t 值而作出切线. 巴罗的方法实质上

是把切线看作是当 a 和 e 趋于零时割线 $\overline{PQ}$ 的极限位置,并利用忽略高阶无限小来取极限.在这里,a 和 e 分别相当于现在的 $\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}x$,而 $\frac{a}{e}$ 则相当于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

巴罗是牛顿的老师,是英国剑桥大学第一任"卢卡斯数学教授",也是英国皇家学会的首批会员.当巴罗发现和认识到牛顿的杰出才能时,便于 1669 年辞去了卢卡斯教授的职位,举荐自己的学生 —— 当时才 27 岁的牛顿来担任.巴罗让贤,已成为科学史上的佳话.

(六) 沃利斯"无穷算术"

沃利斯(J. Wallis,1616—1703) 是在牛顿和莱布尼茨以前,将分析方法引入微积分贡献最突出的数学家.沃利斯最重要的著作是《无穷算术》(1655),其书名就表明了他用本质上是算术的也就是牛顿所说"分析"的途径发展积分法.

沃利斯利用他的算术不可分量方法获得了许多重要结果,其中之一就是将卡瓦列里的幂函数积分公式

$$\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

推广到分数幂情形.他从已知的极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0^k + 1^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + \cdots + n^k} = \frac{1}{k+1}$$

经类比推理,得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[q]{0})^p + (\sqrt[q]{1})^p + \cdots + (\sqrt[q]{n})^p}{(\sqrt[q]{n})^p + (\sqrt[q]{n})^p + \cdots + (\sqrt[q]{n})^p} = \frac{1}{(p/q)+1} = \frac{q}{p+q},$$

并进而猜想

$$\int_0^a x^{p/q} \mathrm{d}x = \frac{a^{(p/q)+1}}{(p/q)+1} = \frac{q}{p+q} a^{(p+q)/q},$$

不过沃利斯仅对 $p = 1$ 的特例证明了这一公式.

沃利斯另一项重要的研究是计算四分之一单位圆的面积,并由此得到 π 的无穷乘积表达式.他计算由坐标轴,x 点的纵坐标和函数

$$y=(1-x^2)^0, y=(1-x^2)^1, y=(1-x^2)^2, y=(1-x^2)^3, \cdots$$

的曲线围成的面积,得到的结果分别为

$$x, x-\frac{1}{3}x^3, x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5, x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7, \cdots,$$

但表示圆的函数是 $y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$,沃利斯利用复杂的插值法算出了它的面积,并进而得到表达式

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

沃利斯的工作直接引导牛顿发现了有理数幂的二项式定理,牛顿二项式定理的推导记录在他 1664—1665 年间的一本读书笔记上,从中可以清楚地看出他是通过推广沃利斯插值法而得到这项发现的.牛顿二项式定理的形式是

$$(P+PQ)^{m/n}=P^{m/n}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ$$

$$+\frac{m-2n}{3n}CQ+\frac{m-3n}{4n}DQ+\cdots,$$

其中 $A=P^{m/n}, B=\frac{m}{n}P^{m/n}Q$,等等,$\frac{m}{n}$ 是任意有理数.二项式定理作为有力的代数工具在微积分的创立中发挥了重要的作用.

17 世纪上半叶一系列前驱性的工作,沿着不同的方向向微积分的大门逼近.但所有这些努力还不足以标志微积分作为一门独立科学的诞生.这些前驱者对于求解各类微积分问题确实作出了宝贵贡献,但他们的方法仍然缺乏足够的一般性.求切线,求变化率、求极大极小值以及求面积、体积等基本问题,在当时是被作为不同的类型处理的.虽然也有人注意到了某些联系,如费马就是用同样的方法求函数的极值和曲线的切线;巴罗的求切线方法实际上是求变化率的几何版本,等等.然而并没有人能将这些联系作为一般规律明确提出,而作为微积分的主要特征的微分与积分的互逆关系,虽然在特殊场合已被某些学者邂逅,如巴罗在《几何学讲义》中有一条定理以几何形式表达了切线问题

是面积问题的逆问题,但他本人完全没有认识到这一事实的重要意义.因此,就需要有人站在更高的高度将以往个别的贡献和分散的努力综合为统一的理论,这是17世纪中叶数学家们面临的艰巨任务.牛顿和莱布尼茨正是在这样的时刻出场的.时代的需要与个人的才识,使他们完成了微积分创立中最后也是最关键的一步.

6.2 牛顿的“流数术”

牛顿(Isaac Newton,1642—1727)于伽利略去世那年——1642年(儒略历)的圣诞出生于英格兰林肯郡伍尔索普村一个农民家庭,是遗腹子,且早产,生后勉强存活.少年牛顿不是神童,成绩并不突出,但酷爱读书与制作玩具.17岁时,牛顿被母亲从他就读的格兰瑟姆中学召回田庄务农,但在牛顿的舅父W.埃斯库和格兰瑟姆中学校长史托克思的竭力劝说下,牛顿的母亲在九个月后又允许牛顿返校学习.史托克思校长的劝说辞中,有一句话可以说是科学史上最幸运的预言,他对牛顿的母亲说:“在繁杂的农务中埋没这样一位天才,对世界来说将是多么巨大的损失!”

牛顿于1661年入剑桥大学三一学院,受教于巴罗,同时钻研伽利略、开普勒、笛卡儿和沃利斯等人的著作.三一学院至今还保存着牛顿的读书笔记,从这些笔记可以看出,就数学思想的形成而言,笛卡儿的《几何学》和沃利斯的《无穷算术》对他影响最深,正是这两部著作引导牛顿走上了创立微积分之路.

1665年8月,剑桥大学因瘟疫流行而关闭,牛顿离校返乡,随后在家乡躲避瘟疫的两年,竟成为牛顿科学生涯中的黄金岁月.制定微积分,发现万有引力和颜色理论,……,可以说牛顿一生大多数科学创造的蓝图,都是在这两年描绘的.

6.2.1 流数术的初建

牛顿对微积分问题的研究始于1664年秋,当时他反复阅读笛卡儿

《几何学》,对笛卡儿求切线的“圆法”发生兴趣并试图寻找更好的方法.就在此时,牛顿首创了小 o 记号表示 x 的无限小且最终趋于零的增量.

1665 年夏至 1667 年春,牛顿在家乡躲避瘟疫期间,继续探讨微积分并取得了突破性进展.据他自述,1665 年 11 月发明“正流数术”(微分法),次年 5 月又建立了“反流数术”(积分法).1666 年 10 月,牛顿将前两年的研究成果整理成一篇总结性论文,此文现以《流数简论》(Tract on Fluxions) 著称,当时虽未正式发表,但在同事中传阅.《流数简论》(以下简称《简论》) 是历史上第一篇系统的微积分文献.

《流数简论》反映了牛顿微积分的运动学背景.该文事实上以速度形式引进了“流数”(即微商) 概念,虽然没有使用“流数”这一术语.牛顿在《简论》中提出微积分的基本问题如下:

(a) 设有两个或更多个物体 $A,B,C,\cdots$ 在同一时刻内描画线段 $x,y,z,\cdots$.已知表示这些线段关系的方程,求它们的速度 $p,q,r,\cdots$ 的关系.

(b) 已知表示线段 x 和运动速度 p、q 之比 $\frac{p}{q}$ 的关系方程式,求另一线段 y.

牛顿对多项式情形给出(a) 的解法.以下举例说明牛顿的解法.

已知方程

$$x^3 - abx + a^3 - dyy = 0,$$

牛顿分别以 $x + po$ 和 $y + qo$ 代换方程中的 x 和 y,然后利用二项式定理,展开得

$$x^3 + 3pox^2 + 3p^2o^2x + p^3o^3 - dy^2$$
$$- 2dqoy - dq^2o^2 - abx - abpo + a^3 = 0,$$

消去和为零的项($x^3 - abx + a^3 - dyy = 0$),得

$$3pox^2 + 3p^2o^2x + p^3o^3 - 2dqoy - dq^2o^2 - abpo = 0,$$

以 o 除之,得

$$3px^2 + 3p^2xo + p^3o^2 - 2dqy - dq^2o - abp = 0,$$

这时牛顿指出“其中含 o 的那些项为无限小”,略去这些无限小,得

$$3px^2 - 2dqy - abp = 0.$$

即所求的速度 p 与 q 的关系. 牛顿对所有的多项式给出了标准的算法，即对多项式

$$f(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j = 0,$$

问题(a) 的解为

$$\sum \left(\frac{ip}{x} + \frac{jq}{y} \right) a_{ij} x^i y^j = 0.$$

对于问题(b)，牛顿的解法实际上是问题(a) 的解的逆运算，并且也是逐步列出了标准算法. 特别重要的是，《简论》中讨论了如何借助于这种逆运算来求面积，从而建立了所谓"微积分基本定理". 牛顿在《简论》中是这样推导微积分基本定理的：

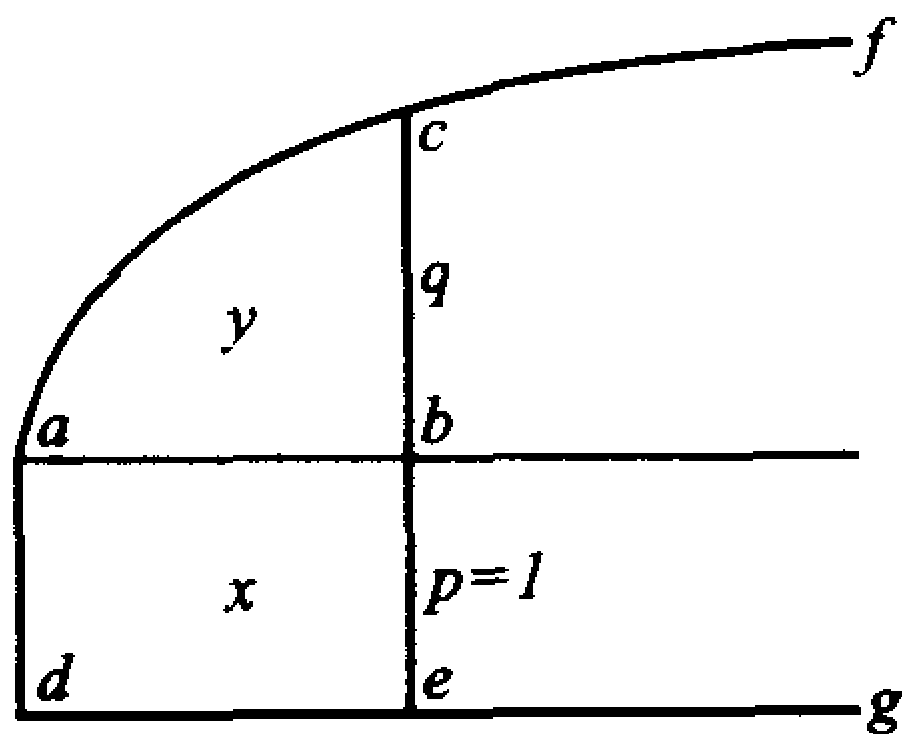


图 6.5

如图 6.5，设 $ab = x$，$\square abc = y$ 为已知曲线 $q = f(x)$ 下的面积，作 $de \,/\!/\, ab \perp ad \,/\!/\, be = p = 1$. 当垂线 cbe 以单位速度向右移动时，eb 扫出面积 ▭$abed = x$，变化率 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p = 1$；$cb$ 扫出面积 $\square abc = y$，变化率 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = q\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = q$. 由此得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \bigg/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{p} = q = f(x),$$

这就是说，面积 y 在点 x 处的变化率是曲线在该处的 q 值. 这就是微积分基本定理. 利用问题(b) 的解法可求出面积 y.

作为例子，牛顿算出纵坐标为 $y = x^n$ 的曲线下的面积是 $\frac{x^{n+1}}{n+1}$；反

之，纵坐标为$\frac{x^{n+1}}{n+1}$的曲线其切线斜率为x^n．当然，《简论》中对微积分基本定理的论述并不能算是现代意义下的严格证明．牛顿在后来的著作中对微积分基本定理又给出了不依赖于运动学的较为清楚的证明．

在牛顿以前，面积总是被看成是无限小不可分量之和，牛顿则从确定面积的变化率入手通过反微分计算面积．前面讲过，面积计算与求切线问题的互逆关系，以往虽然也曾被少数人在特殊场合模糊地指出，但牛顿却能以足够的敏锐与能力将这种互逆关系明确地作为一般规律揭示出来，并将其作为建立微积分普遍算法的基础．正如牛顿本人在《流数简论》中所说：一旦反微分问题可解，许多问题都将迎刃而解．这样，牛顿就将自古希腊以来求解无限小问题的各种特殊技巧统一为两类普遍的算法 —— 正、反流数术亦即微分与积分，并证明了二者的互逆关系而将这两类运算进一步统一成整体．这是他超越前人的功绩，正是在这样的意义下，我们说牛顿发明了微积分．

在《流数简论》的其余部分，牛顿将他建立的统一的算法应用于求曲线切线、曲率、拐点、曲线求长、求积、求引力与引力中心等 16 类问题，展示了他的算法的极大的普遍性与系统性．

6.2.2　流数术的发展

《流数简论》标志着微积分的诞生，但它在许多方面是不成熟的．牛顿于 1667 年春天回到剑桥，对自己的微积分发现未作宣扬．他在这一年 10 月当选为三一学院成员，次年又获硕士学位，并不是因为他在微积分方面的工作，而是因为在望远镜制作方面的贡献．但从那时起直到 1693 年大约四分之一世纪的时间里，牛顿始终不渝努力改进、完善自己的微积分学说，先后写成了三篇微积分论文，它们分别是：

(1)《运用无限多项方程的分析》(De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas，简称《分析学》，完成于 1669 年)；

(2)《流数法与无穷级数》(Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum，简称《流数法》，完成于 1671 年)；

(3)《曲线求积术》(Tractatus de Quadratura Curvarum, 简称《求积术》, 完成于 1691 年).

这三篇论文,反映了牛顿微积分学说的发展过程,并且可以看到,牛顿对于微积分的基础先后给出了不同的解释.

第一篇论文《分析学》是牛顿为了维护自己在无穷级数方面的优先权而作. 1668 年苏格兰学者麦卡托(N. Mercator) 发表了对数级数的结果,这促使牛顿公布自己关于无穷级数的成果.《分析学》利用这些无穷级数来计算流数、积分以及解方程等,因此《分析学》体现了牛顿的微积分与无穷级数紧密结合的特点. 关于微积分本身,《分析学》有简短的说明. 论文一开始就叙述了计算曲线 $y = f(x)$ 下面积的法则. 设有 $y = ax^{m/n}$ 表示的曲线,牛顿论证所求面积为 $z = \frac{na}{m+n}x^{(m+n)/n}$. 牛顿在论证中取 x 而不是时间 t 的无限小增量"瞬"为 o,以 $x + o$ 代 x, $z + oy$ 代 z,则

$$z + oy = \frac{na}{m+n}(x+o)^{(m+n)/n}$$

用二项式定理展示后以 o 除两边,略去 o 的项,即得 $y = ax^{m/n}$. 反过来就知曲线 $y = ax^{m/n}$ 下的面积是 $z = \frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$. 牛顿接着给出了另一条法则:若 y 值是若干项之和,那么所求面积就是由其中每一项得到的面积之和,这相当于逐项积分定理.

由上述可知,牛顿《分析学》以无限小增量"瞬"为基本概念,但却回避了《流数简论》中的运动学背景而将"瞬"看成是静止的无限小量,有时直截了当令其为零,从而带上了浓厚的不可分量色彩.

第二篇论文《流数法》可以看作是 1666 年《流数简论》的直接发展. 牛顿在其中又恢复了运动学观点,但对以物体速度为原型的流数概念作了进一步提炼,并首次正式命名为"流数"(fluxion). 牛顿后来对《流数法》中的流数概念作了如下解释:

"我把时间看作是连续的流动或增长,而其他量则随着时间而连续增长,我从时间的流动性出发,把所有其他量的增长速度称之为流数,又从时间的瞬息性出发,把任何其他量在瞬息时间内产生的部分称之

为瞬”.

《流数法》以清楚明白的流数语言表述微积分的基本问题为：

“已知流量间的关系，求流数关系”；

以及反过来

“已知表示量的流数间的关系的方程，求流量间的关系”.

流数语言的使用，使牛顿的微积分算法在应用方面获得了更大的成功.

无论是《分析学》还是《流数法》都是以无限小量作为微积分算法的论证基础，所不同的是：在《流数法》中变量 x, y 的瞬 $p\times o, q\times o$ 随时间瞬 o 而连续变化；而在《分析学》中变量 x, y 的瞬则是某种不依赖于时间的固定的无限小微元. 大约到 17 世纪 80 年代中，牛顿关于微积分的基础在观念上发生了新的变革，这就是“首末比方法”的提出. 首末比法最先以几何形式在《自然哲学的数学原理》一书中发布，其详尽的分析表述则是在其第三篇微积分论文《曲线求积术》中给出的.

《曲线求积术》是牛顿最成熟的微积分著述. 牛顿在其中改变了对无限小量的依赖并批评自己过去那种随意忽略无限小瞬 o 的做法：“在数学中，最微小的误差也不能忽略. …… 在这里，我认为数学的量不是由非常小的部分组成的，而是用连续的运动来描述的”. 在此基础上定义了流数概念之后，牛顿写道：“流数之比非常接近于在相等但却很小的时间间隔内生成的流量的增量比. 确切地说，它们构成增量的最初比”. 牛顿接着借助于几何解释把流数理解为增量消逝时获得的最终比. 他举例说明自己的新方法如下：

为了求 $y = x^n$ 的流数，设 x 变为 $x+o$，x^n 则变为 $(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \cdots$，构成两变化的“最初比”：

$$\frac{(x+o)-x}{(x+o)^n - x^n} = \frac{1}{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o + \cdots},$$

然后“设增量 o 消逝，它们的最终比就是 $\frac{1}{nx^{n-1}}$”，这也是 x 的流数与 x^n 的流数之比.

这就是所谓“首末比方法”，它相当于求函数自变量与因变量变化之比的极限，因而成为极限方法的先导.

牛顿在《曲线求积术》中还第一次引进了后来被普遍采用的流数记号：$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$ 表示变量 x，y，z 的一次流数（导数），$\ddot{x}$，$\ddot{y}$，$\ddot{z}$ 表示二次流数，$\dddot{x}$，$\dddot{y}$，$\dddot{z}$ 表示三次流数，等等.

牛顿对于发表自己的科学著作态度谨慎. 除了两篇光学著作，他的大多数著作都是经朋友再三催促才拿出来发表. 上述三篇论文发表都很晚，其中最先发表的是最后一篇《曲线求积术》，1704 年载于《光学》附录；《分析学》发表于 1711 年；而《流数法》则迟至 1736 年才正式发表，当时牛顿已去世. 牛顿微积分学说最早的公开表述出现在 1687 年出版的力学名著《自然哲学的数学原理》（Philosophiae naturalis principia mathematica，以下简称《原理》）之中，因此《原理》也成为数学史上的划时代著作.

6.2.3 《原理》与微积分

《原理》中并没有明显的分析形式的微积分. 整部著作是以综合几何的语言写成的. 但牛顿在第一卷第 1 章开头部分通过一组引理（共 11 条）建立了“首末比法”，这正是他后来在《曲线求积术》中作为流数运算基础而重新提出的方法，不过在《原理》中，首末比方法本身也强烈地诉诸几何直观.

第一卷引理 1：“量以及量之比，若在一有限时间内连续趋于相等，并在该时间结束前相互接近且其差可小于任意给定量，则它们最终也变为相等”，可以看作是初步的极限定义. 在随后的引理中牛顿便借极限过程来定义曲边形的面积：如图 6.6，在曲线 acE 与直线 Aa，AE 所围成的图形 $AacE$ 中内接任意个数的矩形 Ab，Bc，Cd，…，同时作矩形 $aKbl$，$bLcm$，$cMdn$，…. 牛顿首先设所有的底 AB，BC，CD，DE，… 皆相等，证明了“当这些矩形的宽无限缩小而它们的个数无限增加时，…… 内接形 $AKbLcMdD$，外接形 $AalbmcndoE$ 与曲线 $abcdE$ 相互的最终比是等量比”. 然后指出当矩形之宽互不相等（如图

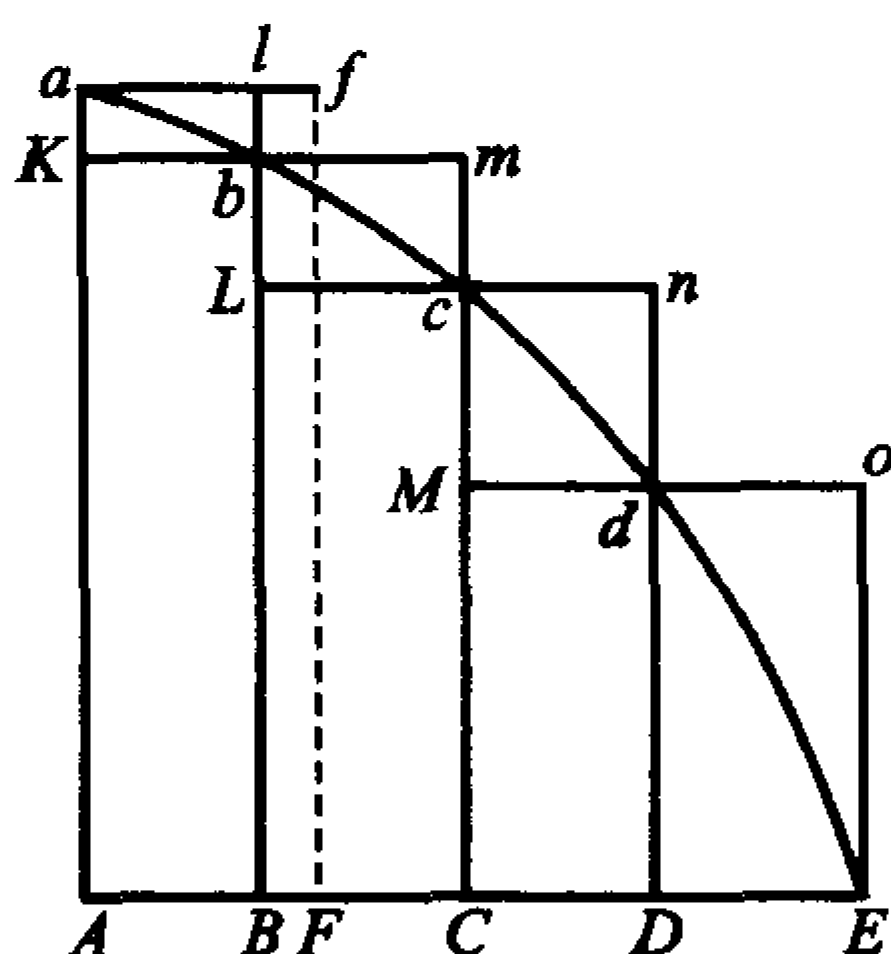


图 6.6

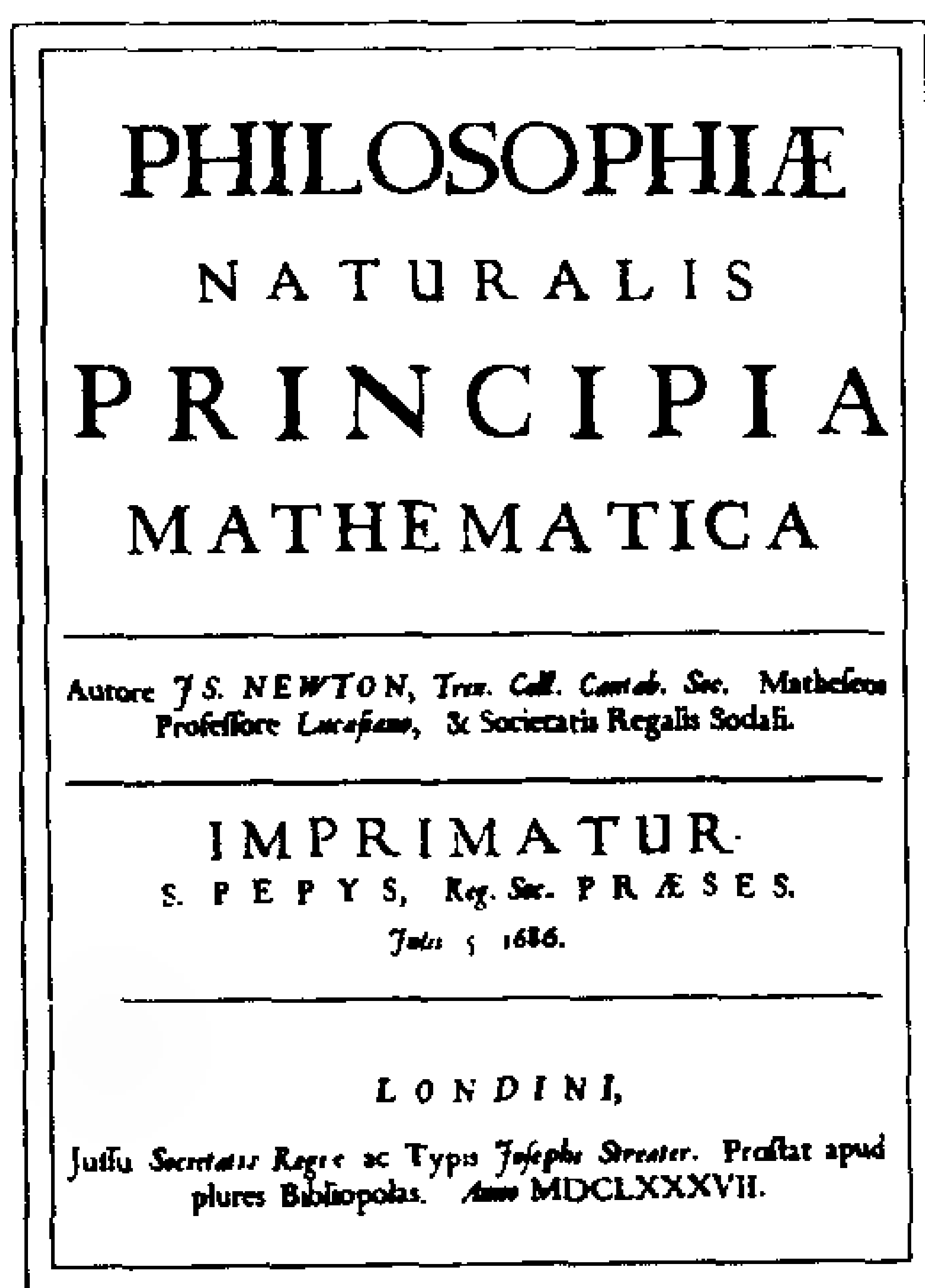
设最大宽度为 AF）但都无限缩小时，上述最终比仍是等量比. 牛顿还证明了：给定曲线弧$\overset{\frown}{AB}$以及相应的弦和切线段，当点 A 与B“相接近而最终相合时”，“弦、弧及切线间相互的最终比为等量比”，等等.

牛顿预见到首末比方法可能遭受的批评，并意识到争论的焦点将在于“最终比”概念，于是在前述引理的评注中对什么是“最终比”作了进一步说明：“消逝量的最终比实际上并非最终量之比，而是无限减小的量之比所趋向的极限. 它们无限接近这个极限，其差可小于任意给定的数，但却永远不会超过它，并且在这些量无限减小之前也不会达到它.”

尽管《原理》表现出以极限方法作为微积分基础的强烈倾向，但并不意味着牛顿完全摒弃无限小观点. 在第二卷第 2 章中，人们可以看到无限小瞬方法的陈述：“任何生成量(genitum)的瞬，等于生成它的各边的瞬乘以这些边的幂指数及系数并逐项相加.” 此处所谓“生成量”，即函数概念的雏形. 牛顿说明这类量的例子有“积、商、根、……”等，并把它们看成是“变化的和不定的”；生成量的瞬则是指函数的微分. 因此上述陈述实际上相当于一些微分运算法则. 例如牛顿分别以 $a,b,c,\cdots$ 表示任意量 $A,B,C,\cdots$ 的瞬，他证明了 AB 的瞬等于$aB+bA$，A^n 的瞬等于 naA^{n-1}，$\dfrac{a}{A^n}$ 的瞬等于 $-n\dfrac{a}{A^{n+1}}$，一般幂 $A^{\frac{n}{m}}$的瞬等于 $\dfrac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$，… 等等.

《原理》在创导首末比方法的同时保留了无限小瞬,这种做法常常被认为自相矛盾而引起争议. 实际上,在牛顿的时代,建立微积分严格基础的时机尚不成熟,在这样的条件下,牛顿在大胆创造新算法的同时,坚持对微积分基础给出不同解释,说明了他对微积分基础所存在的困难的深邃洞察和谨慎态度.

《原理》被爱因斯坦盛赞为“无比辉煌的演绎成就”. 全书从三条基本的力学定律出发,运用微积分工具,严格地推导证明了包括开普勒行星运动三大定律、万有引力定律等在内的一系列结论,并且还将微积分应用于流体运动、声、光、潮汐、彗星乃至宇宙体系,充分显示了这一新数学工具的威力.


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

图 6.7 《原理》第一版扉页

《原理》中的微积分命题虽然都采用了几何形式来叙述、证明,但正如牛顿本人后来解释的那样:发现原理中的绝大多数命题是依靠使用了“新分析法”,然后再“综合地证明”. 事实上,我们在前面已经看到,牛顿发明微积分主要是依靠了高度的归纳算法的能力,并没有多少综合几何的背景. 他1664年参加巴罗主考的三一学院津贴生考试时,因欧氏几何成绩不佳差一点未能通过. 而几乎是在同时,他开始研究微积分并在不到一年的时间里就做出了基本发现. 牛顿后来才重新钻研了巴罗译注的几何《原本》,弥补了这方面的不足,其结果是《原理》中的力学综合体系. 然而就数学而言,牛顿在《原理》中给微积分披上的几何外衣,使他的流数术显得僵硬呆板. 固守牛顿的几何形式,在18世纪阻碍了英国数学的发展.

牛顿的科学贡献是多方面的. 在数学上,除了微积分,他的代数名著《普遍算术》,包含了方程论的许多重要成果,如虚数根必成对出现、笛卡儿符号法则的推广、根与系数的幂和公式等等;他的几何杰作



图 6.8　英镑上的牛顿

《三次曲线枚举》，首创对三次曲线的整体分类研究，是解析几何发展新的一页；在数值分析领域，今天任何一本教程都不能不提到牛顿的名字：牛顿迭代法（牛顿一拉弗森公式）、牛顿－格列高里公式、牛顿－斯特林公式、……；牛顿还是几何概率的最早研究者.

牛顿是一位科学巨人，但他有一次在谈到自己的光学发现时却说："如果我看得更远些，那是因为我站在巨人的肩膀上". 还有一次，当别人问他是怎样作出自己的科学发现时，他的回答是："心里总是装着研究的问题，等待那最初的一线希望渐渐变成普照一切的光明！" 据他的助手回忆，牛顿往往一天伏案工作 18 小时左右，仆人常常发现送到书房的午饭和晚饭一口未动. 偶尔去食堂用餐，出门便陷入思考，兜个圈子又回到住所. 惠威尔（W · Whewell）在《归纳科学史》中写道："除了顽强的毅力和失眠的习惯，牛顿不承认自己与常人有什么区别".

可能是由于早年经历所致，牛顿性格沉郁内向，不善在公众场合表述思想，但这却并没有影响他后来出任伦敦造币局局长和皇家学会会长的任务. 作为皇家学会会长，他能赢得多数会员的拥护，从 1703 年起连选连任，领导这个最高学术机构长达四分之一世纪.

牛顿终身未婚，晚年由外甥女凯瑟琳协助管家. 牛顿的许多言论、轶闻，就是靠凯瑟琳和她的丈夫康杜德的记录留传下来的. 家喻户晓的苹果落地与万有引力的故事，就是凯瑟琳告诉法国哲学家伏尔泰并被

后者写进《牛顿哲学原理》一书中.

牛顿1727年因患肺炎与痛风而逝世,葬于威斯特敏斯特大教堂.当时参加了葬礼的伏尔泰亲眼目睹英国的大人物争抬牛顿的灵柩而无限感叹.剑桥三一学院教堂大厅内立有牛顿全身雕像.牛顿去世后,外甥女凯瑟琳夫妇在亲属们围绕遗产的纠纷中不惜代价保存了牛顿的手稿.现存牛顿手稿中,仅数学部分就达5000多页.

6.3 莱布尼茨的微积分

在微积分的创立上,牛顿需要与莱布尼茨分享荣誉.

莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz,1646—1716)出生于德国莱比锡一个教授家庭,早年在莱比锡大学学习法律,同时开始接触伽利略、开普勒、笛卡儿、帕斯卡以及巴罗等人的科学思想.1667年获阿尔特多夫大学法学博士学位,次年开始为缅因茨选帝侯服务,不久被派往巴黎任大使.莱布尼茨在巴黎居留了四年(1672—1676),这四年对他整个科学生涯的意义,可以与牛顿在家乡躲避瘟疫的两年类比,莱布尼茨许多重大的成就包括创立微积分都是在这一时期完成或奠定了基础.

6.3.1 特征三角形

莱布尼茨在巴黎与荷兰数学家、物理学家惠更斯(C. Huygens)的结识、交往,激发了他对数学的兴趣.他通过卡瓦列里、帕斯卡、巴罗等人的著作,了解并开始研究求曲线的切线以及求面积、体积等微积分问题.

与牛顿流数论的运动学背景不同,莱布尼茨创立微积分首先是出于几何问题的思考,尤其是特征三角形的研究.特征三角形,也称"微分三角形",在巴罗的著作中已经出现.帕斯卡在特殊情形下也使用过这种三角形.莱布尼茨在1673年提出了他自己的特征三角形.据莱布尼茨后来在《微积分的历史和起源》中自述,他这项发现正是受到了帕斯卡论文《关于四分之一圆的正弦》的启发,他从这篇短文的一个例子中"突然看到一束光明".

帕斯卡的“例子”是下述的命题：

“圆的一个象限的任何弧的正弦之和，等于界于两端的两个正弦之间的底线段乘以半径.”

这里“正弦”是指纵坐标，而在所说的和中，每个纵坐标都要乘以相应的圆的无限小弧而不是乘以底的无限小段.

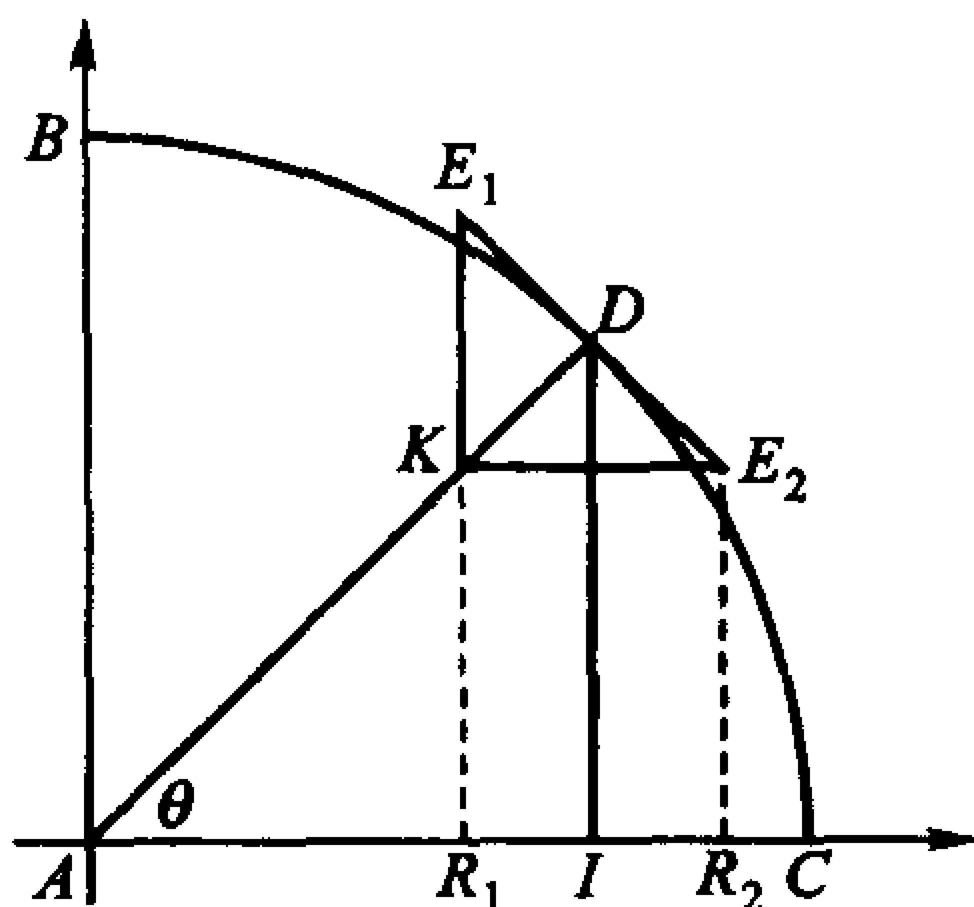


图 6.9

如图 6.9，帕斯卡为了证明他的命题，在四分之一圆上取一点 D，并过点 D 作一个直角三角形 E_1E_2K，其斜边 E_1E_2 与圆相切于 D. 易知 ΔE_1E_2K 与 ΔADI 相似，于是：

$$\frac{AD}{E_1E_2}=\frac{DI}{E_2K},$$

故有：

$$DI\cdot E_1E_2=AD\cdot E_2K=AD\cdot R_1R_2,$$

令 $y=DI, r=AD, E_1E_2=\Delta s, R_1R_2=\Delta x$，则

$$y\Delta s=r\Delta x.$$

帕斯卡将 Δx 和 Δs 看成是一些不可分量，将它们相加，便得到相当于下式的结果：

$$\int y\mathrm{d}s=\int r\mathrm{d}x\ ,$$

从而

$$\int 2\pi y\mathrm{d}s=2\pi\int r\mathrm{d}x=2\pi r^2,$$

左端可以看成是四分之一圆绕 x 轴旋转所成的半球的面积.

帕斯卡的论证仅限于这一特例,他本人并未察觉其中所使用的三角形的普遍意义.莱布尼茨却由此看到帕斯卡的方法可以推广,对任意给定的曲线都可以作这样的无限小三角形,只要用给定曲线的法线来替代圆半径,而借助于这样的无限小三角形,可以"迅速地、毫无困难地建立大量的定理",这就是莱布尼茨从帕斯卡的工作中看到的"一束光明".

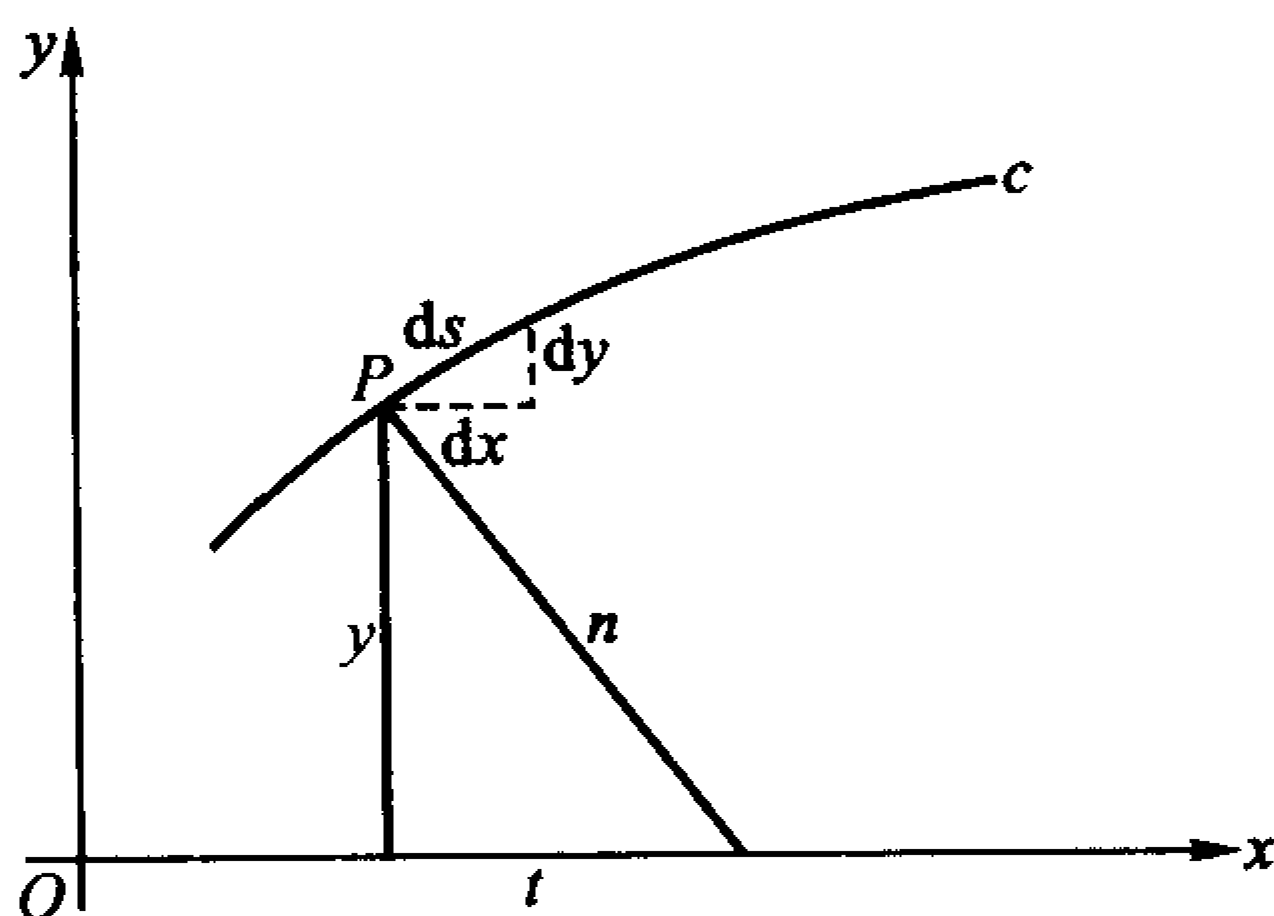


图 6.10

如图 6.10,在给定曲线 c 上点 P 处作特征三角形.利用图示的两个三角形的相似性得到:

$$\frac{\mathrm{d}s}{n}=\frac{\mathrm{d}x}{y},$$

这里 n 是曲线在 P 点的法线长.由上式可得:

$$y\mathrm{d}s = n\mathrm{d}x,$$

求和得:

$$\int y\mathrm{d}s = \int n\mathrm{d}x.$$

莱布尼茨当时还没有微积分的符号,他用语言陈述他的特征三角形导出的第一个重要结果:

"由一条曲线的法线形成的图形,即将这些法线(在圆的情形就是半径)按纵坐标方向置于轴上所形成的图形,其面积与曲线绕轴旋转而成的立体的面积成正比".

显然,帕斯卡关于圆的命题只不过是莱布尼茨上述命题的特例.莱

布尼茨应用特征三角形确实很快发现了他后来才"在巴罗和格列高里的著作中见到的几乎所有定理". 但是如果莱布尼茨就此而止,那么他也不会成为微积分的创立者. 实际上,他在关于特征三角形的研究中认识到:求曲线的切线依赖于纵坐标的差值与横坐标的差值当这些差值变成无限小时之比;而求曲线下的面积则依赖于无限小区间上的纵坐标之和(纵坐标之和在这里是指纵坐标乘以无限小区间的长度再相加,因而也相当于宽度为无限小的矩形面积之和). 莱布尼茨还看出了这两类问题的互逆关系. 他的真正目标,就是要比巴罗等人"更上一层楼",建立起一种更一般的算法,将以往解决这两类问题的各种结果和技巧统一起来. 而他从自己早年关于数的序列的研究中找到了向这一目标挺进的道路.

6.3.2　分析微积分的建立

早在 1666 年,莱布尼茨在《组合艺术》一书中讨论过数列问题并得到许多重要结论,例如他考察了平方数序列:

$$0,1,4,9,16,25,36,\cdots$$

及其一阶差　　$1,3,5,7,9,11,\cdots$

与二阶差　　$2,2,2,2,2,\cdots$

当时他注意到如果原来的序列是从 0 开始,那么一阶差的和就是原序列的最后一项,并且这里序列的求和运算与求差运算存在着互逆的关系.

大约从 1672 年开始,莱布尼茨将他对数列研究的结果与微积分运算联系起来. 借助于笛卡儿解析几何,莱布尼茨可以把曲线的纵坐标用数值表示出来,并想象一个由无穷多个纵坐标值 y 组成的序列,以及对应的 x 值的序列,而 x 被看作是确定纵坐标序列的次序. 同时考虑任意两相继的 y 值之差的序列. 莱布尼茨后来在致洛必达的一封信中总结说:这使他发现,"求切线不过是求差,求积不过是求和"!

莱布尼茨首先着眼于求和,并从简单的情形 $y = x$ 开始. 因为 x 表示相邻两项的次序,莱布尼茨取序数差为 1,设 l 为两相邻项的实际差.

莱布尼茨用拉丁文 omnia 的缩写 omn. 表示和,则有:

$$\text{omn.}\, l = y.$$

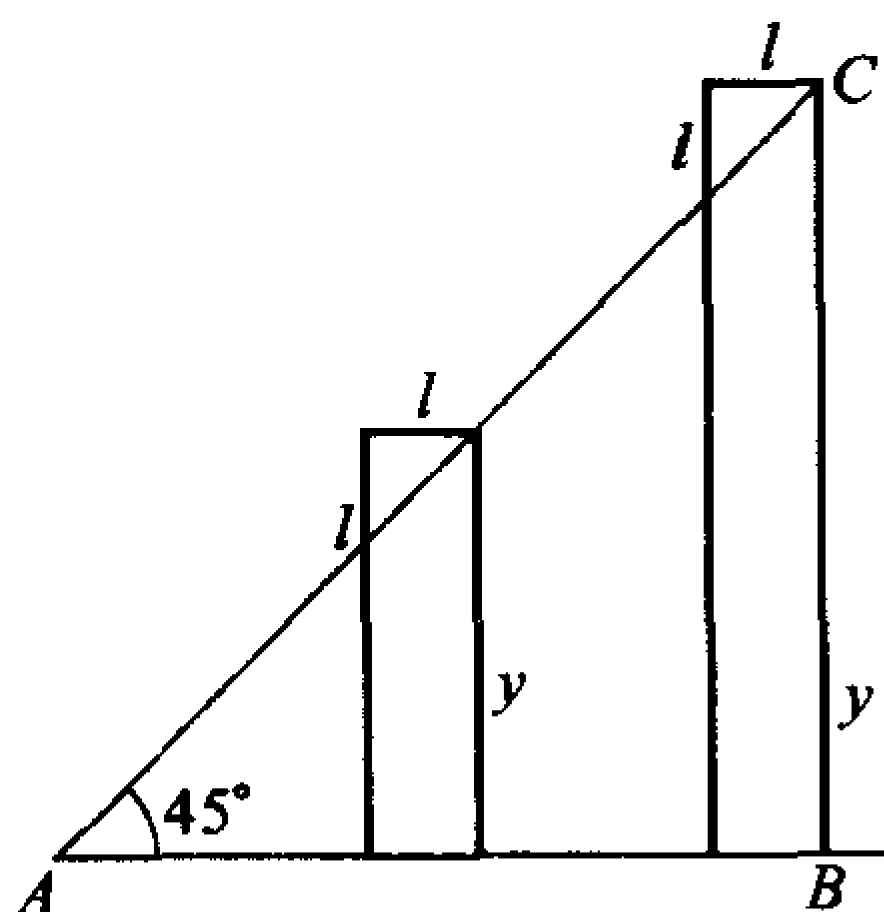


图 6.11

在 $y = x$ 的条件下,如图 6.11 所示,对于无限小的 l 来说,yl 的和等于 $\frac{1}{2}y^2$. 莱布尼茨在这里认为:“从 0 起增长的直线,每一个用与它相应的增长的元素相乘,组成一个三角形”. 所以可以写出:

$$\text{omn.}\, yl = \frac{1}{2}y^2.$$

莱布尼茨后来做了大量工作,艰难地前进,从一串离散值过渡到任意函数 y 的增量. 在 1675 年 10 月 29 日的一份手稿中,他决定用符号 $\int$ 代替 omn.,$\int$ 显然是“sum”的首字母 s 的拉长. 稍后,在 11 月 11 日的手稿中,莱布尼茨又引进了记号 $\mathrm{d}x$ 表示两相邻 x 的值的差,并探索 $\int$ 运算与 d 运算的关系. 无论如何,到 1676 年 11 月,莱布尼茨已经能够给出幂函数的微分与积分公式:

$$\mathrm{d}x^e = ex^{e-1}\mathrm{d}x,$$

和

$$\int x^e \mathrm{d}x = \frac{x^{e+1}}{e+1}.$$

其中 e 不一定是正整数. 他还着重指出:“这种推理是一般的,而与 x 的序列可能是什么没有关系”. 也就是说,x 也可以是自变量的函数而不

是自变量本身.这相当于宣称计算复合函数微分的链式法则.

1677年,莱布尼茨在一篇手稿中明确陈述了微积分基本定理.给定一条曲线,其纵坐标为 y,求该曲线下的面积.莱布尼茨假设可以求出一条曲线(他称之为"割圆曲线"),其纵坐标为 z,使得:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y,$$

即

$$y\mathrm{d}x = \mathrm{d}z.$$

于是原来曲线下的面积是:

$$\int y\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}z = z,$$

莱布尼茨通常假设曲线 z 通过原点.这就将求积问题化成了反切线问题,即:为了求出在纵坐标为 y 的曲线下的面积,只需求出一条纵坐标为 z 的曲线,使其切线的斜率为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y$.如果是在区间 $[a,b]$ 上,由 $[0,b]$ 上的面积减去 $[0,a]$ 上的面积,便得到:

$$\int_a^b y\mathrm{d}x = z(b) - z(a).$$

6.3.3　莱布尼茨微积分的发表

以上是根据莱布尼茨手稿中出现的内容来追溯莱布尼茨微积分的起源,这些手稿散乱且难懂.大约到17世纪80年代初,莱布尼茨开始总结自己陆续获得的结果,并将它们整理成文,公诸于众.

1684年莱布尼茨发表了他的第一篇微分学论文《一种求极大与极小值和求切线的新方法》(拉丁文全名 Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec irrationales quantiquantitates moratur, et singulaze pro illi calculi genus,简称《新方法》),刊登在《教师学报》(Acta Eruditorum)上,这也是数学史上第一篇正式发表的微积分文献.该文是莱布尼茨对自己1673年以来微分学研究的概括,其中定义了微分并广泛采用了微分记号 $\mathrm{d}x$,$\mathrm{d}y$.莱布尼茨假设横坐标 x 的微分 $\mathrm{d}x$ 是任意的量,纵坐标 y 的微分 $\mathrm{d}y$ 就定义为它与 $\mathrm{d}x$ 之比等于纵坐标与次切距

之比的那个量.若记次切距为 p,莱布尼茨就是用等式 $\mathrm{d}y : \mathrm{d}x = y : p$ 来定义微分 $\mathrm{d}y$.这个定义在逻辑上假定切线已先有定义,而莱布尼茨将切线定义为连接曲线上无限接近的两点的直线.由于缺乏极限概念,这个定义是不能令人满意的.莱布尼茨后来还努力要给出高阶微分的合适定义,但并不成功.

《新方法》中明确陈述了莱布尼茨1677年已得到的函数和、差、积、商、乘幂与方根的微分公式:

$$\mathrm{d}(z - y + w + x) = \mathrm{d}z - \mathrm{d}y + \mathrm{d}w + \mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(xv) = x\mathrm{d}v + v\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{y\mathrm{d}v - v\mathrm{d}y}{y^2},$$

$$\mathrm{d}x^a = ax^{a-1}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}\mathrm{d}x.$$

我们知道,莱布尼茨还得出了复合函数的链式微分法则,以及后来又将乘积微分的"莱布尼茨法则"推广到了高阶情形

$$\mathrm{d}^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i(\mathrm{d}^i u) \cdot (\mathrm{d}^{n-i} v).$$

这些都表明莱布尼茨非常重视微积分的形式运算法则和公式系统.相比之下,牛顿虽然也发现并运用了这些法则,但却没有费心去陈述一般公式,他更大的兴趣是微积分方法的直接应用.

《新方法》还包含了微分法在求极大、极小值、求拐点以及光学等方面的广泛应用.其中对光学折射定律的推证特别有意义,莱布尼茨在证完这条定律后,夸耀微分学方法的魔力说:"凡熟悉微分学的人都能像本文这样魔术般做到的事情,却曾使其他渊博的学者百思不解."

1686年,莱布尼茨又发表了他的第一篇积分学论文《深奥的几何与不可分量及无限的分析》(De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum).这篇论文初步论述了积分或求积问题与微分或切线问题的互逆关系.莱布尼茨分析道:"研究不定求积或其不可能性的方法,对我来说不过是我称之为反切线方法的更广泛的问

题的特殊情形(并且事实上是比较容易的情形),而这种反切线方法包括了整个超越几何的绝大部分."

在这篇积分学论文中,莱布尼茨给出了摆线方程为:

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x - x^2}},$$

目的是要说明他的方法和符号,可以将一些被其他方法排斥的超越曲线表为方程.而正是在这篇论文中,积分号$\int$第一次出现于印刷出版物上.莱布尼茨在引入摆线方程以前还特别对他的微分符号 $\mathrm{d}x$ 作了一段说明:"我选用 $\mathrm{d}x$ 和类似的符号而不用特殊字母,因为 $\mathrm{d}x$ 是 x 的某种变化,…… 并可表示 x 与另一变量之间的超越关系".这种对符号的精心选择,是莱布尼茨微积分的又一特点.他引进的符号 d 和$\int$体现了微分与积分的"差"与"和"的实质,后来获得普遍接受并沿用至今.相对而言,牛顿对符号不太讲究,他用带点字母 $\dot{x},\dot{y},\cdots$ 表示流数,带撇字母 $\acute{x},\acute{y},\cdots$ 表示流量(积分).虽然点记号今天在某些场合仍在使用,但牛顿的积分号则是完全被淘汰了.

6.3.4　其他数学贡献

莱布尼茨的博学多才在科学史上罕有所比,其著作涉及数学、力学、机械、地质、逻辑、哲学、法律、外交、神学和语言学等.在数学上,他的贡献也远不止微积分.

莱布尼茨在 1666 年发表的《组合艺术》(De Arte Combinatoria) 和一些相关的文稿中,提出了符号逻辑的思想,引导了布尔、罗素等人的数理逻辑.

莱布尼茨 1679 年撰写的《二进制算术》,使他成为二进记数制的发明人.二进制在现代被应用于计算机设计,但莱布尼茨本人并没有将它用到自己的计算机上.莱布尼茨后来发现他的二进制数可以给中国古老的六十四卦易图一个很好的数学解释,他是通过他的朋友、法国传教士白晋(F.J.Bouvet)得到六十四卦图的.莱布尼茨高兴地说:"可以让

我加入中国籍了吧”!

莱布尼茨是制造计算机的先驱,他 1674 年在巴黎科学院当众演示了他制成的“算术计算机”,这是第一台能做四则运算的计算机.在莱布尼茨之前,帕斯卡制成了可以进行加减运算的计算机.



图 6.12 莱布尼茨

莱布尼茨在数学上还有一项发明就是行列式.1693 年 4 月 28 日他在写给洛必达的一封信中将线性方程组写成

$$\begin{cases} 1_0 + 1_1 x + 1_2 y = 0 \\ 2_0 + 2_1 x + 2_2 y = 0 \\ 3_0 + 3_1 x + 3_2 y = 0 \end{cases}$$

的形式,这里的系数记号 $1_0, 1_1, \cdots$ 相当于现代行列式或矩阵中的元素 a_{ij}.如果方程组相容,莱布尼茨写出:

$$1_0 \cdot 2_1 \cdot 3_2 + 1_2 \cdot 2_0 \cdot 3_1 + 1_1 \cdot 2_2 \cdot 3_0$$
$$= 1_1 \cdot 2_0 \cdot 3_2 + 1_0 \cdot 2_2 \cdot 3_1 + 1_2 \cdot 2_1 \cdot 3_0$$

这相当于现在的系数行列式为零的条件.

不过莱布尼茨关于行列式的信件 1850 年才正式发表.就写作时间而论,比莱布尼茨早十年,日本数学家关孝和(Seki Takakazu)在一本叫《解伏题之法》的书中也已提出了行列式的概念与算法.关孝和(约 1642—1708)是牛顿、莱布尼茨的同时代人,被尊为日本“算圣”.除了行列式,他还创造了“圆理”学说,圆理是与圆有关的算法,以无穷级数为基础计算各种曲线与曲面围成的面积与体积.在关孝和之前,日本数学主要受中国数学的影响,关孝和以笔算代替筹算与珠算,开创了在 18 世纪十分活跃的日本“和算”.和算的核心“圆理”,与欧洲早期微积分准备阶段的一些工作东西相映成趣.

莱布尼茨在巴黎繁忙的外交生活和丰硕的科学探索之后回到德国,在汉诺威不伦瑞克公爵府任顾问和图书馆长,从此定居汉诺威.莱布尼茨是一位科学活动家,他的一些创举使科学受益匪浅.他是柏林科学院

的创建者和首任院长,彼得堡科学院、维也纳科学院也是在他的倡议下成立的.莱布尼茨甚至曾写信给中国康熙皇帝建议成立北京科学院.

1698年以后,莱伯尼兹失宠于新任的汉诺威公爵乔治·路德维克(即后来的英王乔治一世),加上与牛顿的微积分优先权争论,使他的晚景颇为凄凉.1716年,在经受了胆结石与痛风症的折磨之后,莱布尼茨离开了人世,据说只有忠实的秘书参加了他的葬礼.

6.4 牛顿与莱布尼茨

牛顿和莱布尼茨都是他们时代的巨人.就微积分的创立而言,尽管在背景、方法和形式上存在差异、各有特色,但二者的功绩是相当的.他们都使微积分成为能普遍适用的算法,同时又都将面积、体积及相当的问题归结为反切线(微分)运算.应该说,微积分能成为独立的科学并给整个自然科学带来革命性的影响,主要是靠了牛顿与莱布尼茨的工作.在科学史上,重大的真理往往在条件成熟的一定时期由不同的探索者相互独立地发现,微积分的创立,情形也是如此.

我们知道,牛顿在1687年以前没有公开发表过任何微积分的文章,而莱布尼茨则在1684和1686年分别发表了微分学与积分学的论文.1687年当牛顿在《原理》中首次发布他的流数方法时,他在前言中作了这样一段说明:

"十年前,我在给学问渊博的数学家莱布尼茨的信中曾指出:我发现了一种方法,可用以求极大值、极小值、作切线以及解决其他类似的问题,而且这种方法也适用于无理数,…….这位名人回信说他也发现了类似的方法,并把他的方法给我看了.他的方法与我的大同小异,除了用语、符号、算式和量的产生方式外,没有实质性区别."

这可以说是对微积分发明权问题的客观评述,遗憾的是,它在《原理》第3版时被删去了,原因是期间牛顿与莱布尼茨之间发生了优先权问题的争执.

争端是由局外人挑起的.瑞士数学家德丢勒(N.F.de Duillier)1699年在一本小册子中提出"牛顿是微积分的第一发明人",而莱布尼茨作为"第

二发明人”,“曾从牛顿那里有所借鉴”. 莱布尼茨立即对此作了反驳. 1712 年,英国皇家学会专门指定了一个委员会进行调查,并于翌年公布了一份著名的《通报》,宣布“确认牛顿为第一发明人”. 这引起了莱布尼茨的申诉. 争论在双方的追随者之间越演越烈,直到莱布尼茨和牛顿都去世以后,才逐渐平息并得到解决. 经过调查,特别是对莱布尼茨手稿的分析,证实两人确实是相互独立地完成了微积分的发明. 就发明时间而言,牛顿早于莱布尼茨;就发表时间而言,莱布尼茨则先于牛顿.

值得补充的是,尽管发生了纠纷,两位学者却从未怀疑过对方的科学才能. 有一则记载说,1701 年在柏林王宫的一次宴会上,当普鲁士王问到对牛顿的评价时,莱布尼茨回答道:“综观有史以来的全部数学,牛顿做了一多半的工作”.

优先权争论被认为是“科学史上最不幸的一章”. 微积分发明权的争论,对整个 18 世纪英国与欧陆国家在数学发展上的分道扬镳,产生了严重影响. 虽然牛顿在微积分应用方面的辉煌成就极大地促进了科学的进步,但由于英国数学家固守牛顿的传统而使自己逐渐远离分析的主流. 分析的进步在 18 世纪主要是由欧陆国家的数学家在发展莱布尼茨微积分方法的基础上而取得的.

分析时代 7

微积分的创立,被誉为"人类精神的最高胜利"①. 在 18 世纪,微积分进一步深入发展,这种发展与广泛的应用紧密交织在一起,刺激和推动了许多数学新分支的产生,从而形成了"分析"这样一个在观念和方法上都具有鲜明特点的数学领域. 在数学史上,18 世纪可以说是分析的时代,也是向现代数学过渡的重要时期.

7.1 微积分的发展

无限小算法的推广,在英国和欧洲大陆国家是循着不同的路线进行的.

不列颠的数学家们在剑桥、牛津、伦敦和爱丁堡等著名的大学里教授和研究牛顿的流数术,他们中的优秀代表有泰勒(B. Taylor)、麦克劳林(C. Maclaurin)、棣莫弗(A. de Moivre)、斯特林(J. Stirling)等. 泰勒(1685—1731)做过英国皇家学会秘书. 他在 1715 年出版的《正的和反的增量方法》一书中,陈述了他早在 1712 年就已获得的著名定理

$$x(z+v)=x+\dot{x}\frac{v}{1\cdot\dot{z}}+\ddot{x}\frac{v^2}{1\cdot2\cdot\dot{z}^2}+\dot{\ddot{x}}\frac{v^3}{1\cdot2\cdot3\cdot\dot{z}^2}+\cdots,$$

其中 v 为独立变量 z 的增量,$\dot{x}$ 和 $\dot{z}$ 为流数. 泰勒假定 z 随时间均匀变

① 恩格斯:《自然辩证法》,p. 244. 人民出版社,1971.

化,故 $\dot{z}$ 为常数,从而上述公式相当于现代形式的"泰勒公式":

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots.$$

泰勒公式使任意单变量函数展为幂级数成为可能,是微积分进一步发展的有力武器.但泰勒对该定理的证明很不严谨,也没有考虑级数的收敛性.

泰勒公式在 $x=0$ 时的特殊情形后来被爱丁堡大学教授麦克劳林重新得到,现代微积分教科书中一直把 $x=0$ 时的泰勒级数称为"麦克劳林级数".麦克劳林(1698—1746)是牛顿微积分学说的竭力维护者,他在这方面的代表性著作《流数论》,以纯熟却难读的几何语言论证流数方法,试图从"若干无例外的原则"出发严密推演牛顿的流数论,这是使微积分形式化的努力,但因囿于几何传统而并不成功.《流数论》中还包括有麦克劳林关于旋转椭球体的引力定理,证明了两个共焦点的椭球体对其轴或赤道上一个质点的引力与它们的体积成正比.

麦克劳林之后,英国数学陷入了长期停滞的状态.微积分发明权的争论滋长了不列颠数学家的民族保守情绪,使他们不能摆脱牛顿微积分学说中弱点的束缚.与此相对照,在英吉利海峡的另一边,新分析却在莱布尼茨的后继者们的推动下蓬勃发展起来.

推广莱布尼茨学说的任务,在从17世纪到18世纪的过渡时期,主要是由雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli,1654—1705)和约翰·伯努利(John Bernoulli,1667—1748)担当.这两兄弟来自历史上最大的数学家族——瑞士巴塞尔的伯努利家族.这个原先从荷兰安特卫普(Antwerp,今比利时城市)迁来的商人家族,在17、18世纪先后产生了十多位著名的数学家,雅各布和约翰是其中最有影响的两位.二人在学术上的争强好胜留下了许多有趣的科学轶闻,但他们都是莱布尼茨忠实的学生与朋友.他们的工作,构成了现今所谓初等微积分的大部分内容.

18世纪微积分最重大的进步是由欧拉(Leonard Euler,1707—1783)作出的.欧拉在1748年出版的《无限小分析引论》(Introductio in Anclysin infinitorum)以及他随后发表的《微分学》(Institutionis Calculi differentialis,1755)和《积分学》(Institutiones

Calculi integralis,共 3 卷,1768—1770)是微积分史上里程碑式的著作,它们在很长时间里被当作分析课本的典范而普遍使用着. 这三部著作包含了欧拉本人在分析领域的大量创造,同时引进了一批标准的符号如:

$f(x)$ — 函数符号

$\sum$ — 求和号

e — 自然对数底

i — 虚数号

等等,对分析表述的规范化起了重要作用.

欧拉出生于瑞士巴塞尔一个牧师家庭,13 岁就进入巴塞尔大学,数学老师是约翰·伯努利. 师生之间建立了极亲密的关系,伯努利后来在给欧拉的一封信中这样赞许自己这位学生在分析方面的青出于兰:"我介绍高等分析时,它还是个孩子,而您正在将它带大成人."

欧拉主要的科学生涯是在俄国圣彼得堡科学院(1727—1741;1766—1783)和德国柏林科学院(1741—1766)度过的. 他对彼得堡科学院怀有特殊的感情,曾将自己的科学成就归功于"在那儿拥有的有利条件."

欧拉是历史上最多产的数学家. 他生前发表的著作与论文有 560 余种,死后留下了大量手稿. 欧拉自己说他未发表的论文足够彼得堡科

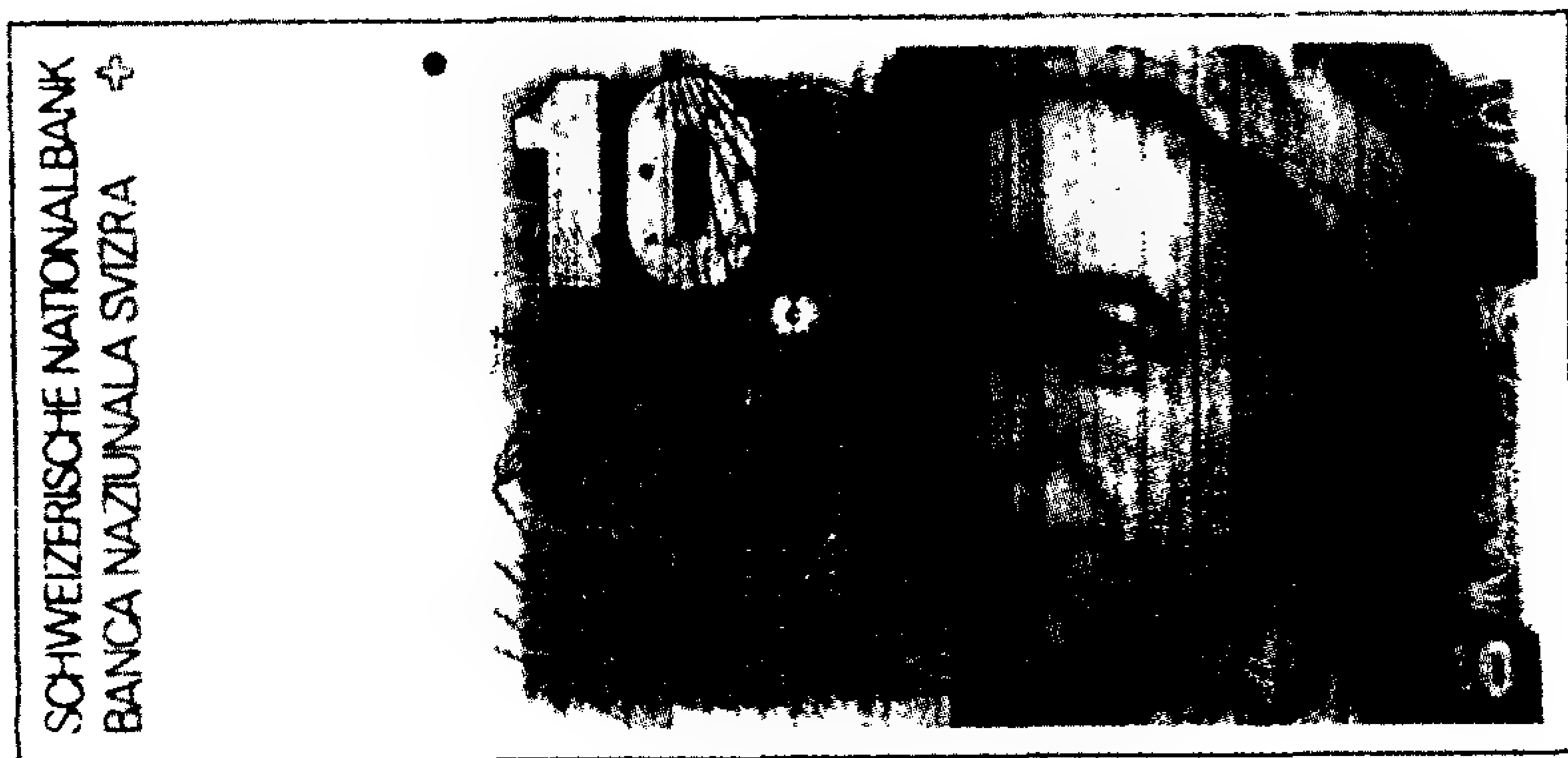


图 7.1　瑞士法朗上的欧拉

学院用上20年,结果是直到1862年即他去世80年后,彼得堡科学院院报上还在刊登欧拉的遗作.1911年瑞士自然科学协会开始出版欧拉全集,现已出版70多卷,计划出齐84卷,都是大四开本.欧拉从18岁开始创作,到76岁逝世,因此单是收进全集的这些文稿,欧拉平均每天就要写约1.5页大四开纸的东西,而欧拉还有不少手稿在1771年的彼得堡大火中化为灰烬.欧拉28岁左眼失明,56岁双目失明,他完全是依靠惊人的记忆和心算能力进行研究与写作.

与牛顿不同,欧拉一生结过两次婚,是13个孩子的父亲.1783年9月的一天,欧拉在与同事讨论了天王星轨道计算以后疾病发作,喃喃自语道:"我要死了!"如巴黎科学院秘书孔多塞(M.-J.-A.-N.C.de Condorcet)形容的那样,他"停止了计算,也停止了生命."

除了伯努利兄弟和欧拉,在18世纪推进微积分及其应用贡献卓著的欧陆数学家中,首先应该提到法国学派,其代表人物有克莱洛(A.C. Clairaut,1713—1765)、达朗贝尔(J.L.R.d'Alembert,1717—1783)、拉格朗日(J.L.Lagrange,1736—1813)、蒙日(G.Monge,1746—1818)、拉普拉斯(P.-S.Laplace,1749—1827)和勒让德(A.M.Legendre,1752—1833)等.

18世纪这些数学家虽然不像牛顿、莱布尼茨那样创立了微积分,但他们在微积分发展史上同样功不可没,假如没有他们的奋力开发与仔细耕耘,牛顿和莱布尼茨草创的微积分领地就不可能那样春色满园,相反也许会变得荒芜凋零.我们不可能逐一介绍18世纪的数学家和他们的工作,以下概要论述这一时期微积分深入发展的几个主要方面.

(一)积分技术与椭圆积分

18世纪数学家们以高度的技巧,将牛顿和莱布尼茨的无限小算法施行到各类不同的函数上,不仅发展了微积分本身,而且作出了许多影响深远的新发现.在这方面,积分技术的推进尤为明显.

约翰·伯努利和欧拉在他们的论著中使用变量代换和部分分式等方法求出了许多困难的积分,这些方法已经成为今天微积分教科书中求函数积分的常用方法.

当18世纪的数学家们考虑无理函数的积分时,他们就在自己面前打开了一片新天地,因为他们发现许多这样的积分不能用已知的初等函数来表示.例如雅各布·伯努利在求双纽线(在极坐标下方程为 $r^2 = a^2\cos2\theta$)弧长时,得到弧长积分

$$s = \int_0^r \frac{a^2}{\sqrt{a^4 - r^4}}\mathrm{d}r.$$

在天文学中很重要的椭圆弧长计算则引导到积分

$$s = a\int_0^t \frac{(1 - k^2t^2)\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2t^2)}}.$$

欧拉在1744年处理弹性问题时也得到积分

$$\int_0^x \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\mathrm{d}x}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}}.$$

所有这些积分都属于后来所说的"椭圆积分"的范畴,它们既不能用代数函数,也不能用通常的初等超越函数(如三角函数、对数函数等)表示出来.椭圆积分的一般形式是

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\mathrm{d}x\ ,$$

(其中 $P(x)$ 是 x 的有理函数,$R(x)$ 则是一般的四次多项式).勒让德后来将所有的椭圆积分归结为三种基本形式.在18世纪,法尼亚诺(G.C.Fagnano,1682—1766)、欧拉、拉格朗日和勒让德等还就特殊类型的椭圆积分积累了大量结果.对椭圆积分的一般研究在19世纪20年代被阿贝尔和雅可比(C.G.Jacobi,1804—1851)分别独立地从反演的角度发展为深刻的椭圆函数理论.

(二)微积分向多元函数的推广

虽然微积分的创立者已经接触到了偏微商和重积分的概念,但将微积分算法推广到多元函数而建立偏导数理论和多重积分理论的主要是18世纪的数学家.

1720年,尼古拉·伯努利(Nicolaus Bernoulli II 1687—1759)证明了函数 $f(x,y)$ 在一定条件下,对 x,y 求偏导数其结果与求导顺序无关,即相当于有

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

欧拉在 1734 年的一篇文章中也证明了同样的事实. 在此基础上,欧拉在一系列的论文中发展了偏导数理论. 达朗贝尔在 1743 年的著作《动力学》和 1747 年关于弦振动的研究中,也推进了偏导数演算. 不过当时一般都用同一个记号 d 表示通常导数与偏导数,专门的偏导数记号$\frac{\partial}{\partial x}$、$\frac{\partial}{\partial y}$、… 到 19 世纪 40 年代才由雅可比在其行列式理论中正式创用并逐渐普及,虽然拉格朗日在 1786 年曾建议使用这一符号.

多重积分实际上已包含在牛顿关于万有引力的计算中,但牛顿使用了几何论述. 在 18 世纪,牛顿的工作被人以分析的形式推广. 1748 年欧拉用累次积分算出了表示一厚度为 δc 的椭圆薄片对其中心正上方一质点的引力的重积分:

$$\delta c \iint \frac{c\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(c^2 + x^2 + y^2)^{3/2}},$$

积分区域由椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$围成. 到 1770 年左右,欧拉已经能给出计算二重定积分的一般程序. 而拉格朗日在关于旋转椭球的引力的著作中,用三重积分表示引力,并开始了多重积分变换的研究.

(三) 无穷级数理论

微积分的发展与无穷级数的研究密不可分. 牛顿在他的流数论中自由运用无穷级数,他凭藉二项式定理得到了 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arctan x$ 和 e^x 等许多函数的级数. 泰勒级数则提供了将函数展成无穷级数的一般方法. 在 18 世纪,各种初等函数的级数展开陆续得到,并在解析运算中被普遍用来代表函数而成为微积分的有力工具.

莱布尼茨也曾独立地得到了 $\sin x$, $\cos x$ 和 $\arctan x$ 等的级数,但他却对微积分问题的有限或封闭形式的解更感兴趣,他的学生们弥补了这方面的不足. 尤其是雅各布 · 伯努利,他在 1689—1704 年间撰写了 5 篇关于无穷级数的论文,使他成为当时这一领域的权威,这些论文的主题也是关于函数的级数表示及其在求函数的微分与积分、求曲线下的面积和曲线长等方面的应用. 这些构成了雅各布 · 伯努利对微积分算

法的重要贡献.但就级数理论本身而言,其中一个很有启发性的工作是关于调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

的和是无穷的证明.他首先指出了

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\cdots+\frac{1}{n^2}>(n^2-n)\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{n},$$

故有

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1.$$

这意味着可将原级数中的项分组并使每一组的和都大于 1,于是我们总可以得到调和级数的有限多项的和,使它大于任何给定的量.

调和级数的讨论引起了对发散级数的兴趣并产生了许多重要的结果,特别是利用发散级数而获得的一些著名的数值逼近公式.例如,斯特林在 1730 年得到一个发散的级数表示:

$$\log n!=(n+\frac{1}{2})\log n-n+\log\sqrt{2\pi}+\frac{B_2}{1\cdot 2}\frac{1}{n}$$
$$+\frac{B_4}{3\cdot 4}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)}\frac{1}{n^{2k-1}}+\cdots.$$

它相当于

$$n!=\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}\ \exp\left[\frac{B_2}{1\cdot 2}\frac{1}{n}+\cdots+\frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)}\frac{1}{n^{2k-1}}+\cdots\right].$$

利用它可以作 $n!$的近似计算.当 n 很大时,

$$n!\approx\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}\ ,$$

称之为斯特林公式,虽然这一极限情形是由棣莫弗得到的.

上述斯特林级数系数中出现的 $B_2,B_4,B_6,\cdots$ 叫做“伯努利数”; $B_2=\frac{1}{6},B_4=-\frac{1}{30},B_6=\frac{1}{42},B_8=-\frac{1}{30},B_{10}=\frac{5}{66},\cdots$,它们是雅各布·伯努利在他的一部概率论著作《猜测术》(Ars Conjectandi, 1713)

中求整数 m 正整数次幂和公式时得到的①,伯努利的公式是:

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}B_2 n^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}B_4 n^{c-3} + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}B_6 n^{c-5} + \cdots .$$

伯努利数今天已成为分析中应用极广的数.18 世纪通过研究发散级数获得的另一个重要常数"欧拉常数"γ,是欧拉讨论如何用对数函数来逼近调和级数的和时得到的,它最简单的表示形式为:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

欧拉曾计算出 γ 的近似值 0.577 218,但迄今我们还不能判定 γ 究竟是有理数还是无理数.

除了调和级数,当时引起热烈辩论的另一类发散级数是

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots .$$

雅各布·伯努利在 1696 年的论文中作如下推理:

$$\frac{l}{m+n} = \frac{l}{m}\left(1 + \frac{n}{m}\right)^{-1} = \frac{l}{m} - \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} - \cdots.$$

当 $m = n = 1$ 时得到

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots .$$

但另一方面

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0;$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1.$$

伯努利称这些互相矛盾的结果为"有趣的悖论".1703 年,意大利数学家格兰弟(G. Grandi)通过 $\frac{1}{1+x}$ 的级数展开又重新发现这一悖论:在

① 日本数学家关孝和在 1709 年出版的《括要算法》中已得出了同样这些常数,并且也是在计算幂和 $\sum_{k=1}^{n} k^c$(和算与中算中都称之为"乘方垛积")过程中得到的.

级数

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

中令 $x=1$,得

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots=(1-1)+(1-1)+\cdots=0.$$

格兰弟称之为“无中生有.”

这类发散级数悖论刺激了人们对无穷级数收敛性的思考.18世纪先后出现了一些级数收敛判别法则.如莱布尼茨变号级数收敛定理(1713):级数 $\sum a_n$ 若 a_n 交替变号,且 $|a_n|$ 趋于0,则该级数收敛;麦克劳林积分判别法(1742):级数 $\sum\limits_n \varphi(n)$ 收敛的充要条件是 $\int_a^{\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 有限($\varphi(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant\infty$ 上有限且同号);达朗贝尔级数绝对收敛判别法(1754):级数 $\sum\limits_n u_n$ 绝对收敛,若存在数 N,使对所有的 $n>N$,有 $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}<\rho<1$($\rho$ 为固定的常数),等等.这些说明18世纪的数学家们已开始注意到无穷级数的收敛性问题,尽管对这一问题真正严格的处理要等到19世纪.

(四)函数概念的深化

18世纪微积分发展的一个历史性转折,是将函数放到了中心的地位,而以往数学家们都以曲线作为微积分的主要对象.这一转折首先也应归功于欧拉,欧拉在《无限小分析引论》中明确宣布:“数学分析是关于函数的科学”,微积分被看作是建立在微分基础上的函数理论.

函数概念在17世纪已经引入,牛顿《原理》中提出的“生成量”就是雏形的函数概念.莱布尼茨首先使用了“函数”(function)这一术语.他把函数看成是“像曲线上点的横坐标、纵坐标、切线长度、垂线长度等所有与曲线上的点有关的量”.最先将函数概念公式化的是约翰·伯努利.欧拉则将伯努利的思想进一步解析化,他在《无限小分析引论》中将函数定义为:

“变量的函数是一个由该变量与一些常数以任何方式组成的解析表达式.”

欧拉的函数定义在18世纪后期占据了统治地位.在这一定义的基础上,函数概念本身大大丰富了.欧拉在《引论》中明确区分了代数函数与超越函数,将超越函数看成是以无限多次算术运算而得到的表达式,也就是说可用无穷级数表示的函数.欧拉还区分了显函数与隐函数、单值函数与多值函数等.通过一些积分问题的求解,一系列新的超越函数被纳入了函数的范畴.除了上面已提到的椭圆积分外,18世纪得到的最重要的超越函数还有Γ-函数和B-函数:

$$\Gamma(n+1)=n!=\int_0^1(-\log x)^n\mathrm{d}x=\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$B(m,n)=\int_0^1(1-x)^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x\ ,$$

这两个函数在欧拉《无限小分析引论》中都有论述,但欧拉早在1730年给哥德巴赫的一封信中已经发现它们.其中Γ-函数是他用插值法将阶乘($n!$)概念推广到非整数情形时得到的积分表达式,“Γ-函数”的名称及记号$\Gamma(n+1)$是勒让德后来(1811)给出的.欧拉在1771年进一步建立了这两个函数之间的关系:

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

Γ-函数,B-函数与椭圆积分等一起,是18世纪新发现的超越函数的重要例子,对于函数概念的拓广多有影响.

在18世纪,已有的初等函数包括三角函数、指数函数和对数函数则被推广到了复数领域,这也是受到了积分计算的激发.因为例如当人们用部分分式法则来求积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$时,会导致形式为$\int\frac{\mathrm{d}x}{ex+f}$的积分,其中被积式的系数有可能是复数.由于这种积分在形式上可看作是对数函数,这就引起了关于什么是复数的对数和负数的对数的探讨.1714年英国人柯茨(R. Cotes)得到了关系:

$$\mathrm{i}\varphi=\log_{\mathrm{e}}(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)\ .$$

这一结果后又被欧拉独立得到并写进了《无限小分析引论》,《引论》中

还发表了著名的公式:

$$(\cos\varphi \pm \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm \mathrm{i}\sin n\varphi.$$

这公式现在也叫"棣莫弗公式",棣莫弗在1707—1730年曾逐步得到了相当于这一公式的结果,但他仅隐含地写出这一公式,欧拉首次明确地陈述了这一公式.并将n推广为任意实数.这些公式不仅使人们能正确回答什么是复数的对数,更重要的是揭示了三角函数、指数函数和对数函数之间的深刻联系而形成了初等函数的统一理论.

(五)微积分严格化的尝试

牛顿和莱布尼茨的微积分是不严格的,特别在使用无限小概念上的随意与混乱,关于这一点,我们在关于他们工作的介绍中已经提到.这使他们的学说从一开始就受到怀疑和批评.

1695年,荷兰物理学家纽汶蒂(B. Nieuwentyjt)在其著作《无限小分析》中指责牛顿的流数术叙述"模糊不清",莱布尼茨的高阶微分"缺乏根据"等.最令人震憾的抨击是来自英国哲学家、牧师伯克莱,伯克莱(G. Berkeley,1685—1753)在1734年担任克罗因(在今爱尔兰境内)主教,同年发表小册子《分析学家,或致一位不信神的数学家》(The Analyst, a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician),副题中"不信神的数学家"是指曾帮助牛顿出版《原理》的哈雷(E. Halley).伯克莱在书中认为当时的数学家们以归纳代替演绎,没有为他们的方法提供合法性证明.他集中攻击牛顿流数论中关于无限小量的混乱假设,例如在首末比方法中,为了求幂x^n的流数,牛顿假设x有一个增量o,并以它去除x^n的增量得$nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o+\cdots$,然后又让$o$"消失",得到$x^n$的流数$nx^{n-1}$,伯克莱指出这里关于增量$o$的假设前后矛盾,是"分明的诡辩".他讥讽地问道:"这些消失的增量究竟是什么呢?它们既不是有限量,也不是无限小,又不是零,难道我们不能称它们为消逝量的鬼魂吗?"《分析学家》的主要矛头是牛顿的流数术,但对莱布尼茨的微积分也同样竭力非难,认为其中的正确结论,是从错误的原理出发通过"错误的抵消"而获得.

伯克莱对微积分学说的攻击主要是出于宗教的动机,目的是要证

明流数原理并不比基督教义"构思更清楚"、"推理更明白". 但他的许多批评是切中要害的,在客观上揭露了早期微积分的逻辑缺陷,刺激了数学家们为建立微积分的严格基础而努力. 为了回答伯克莱的攻击,在英国本土产生了许多为牛顿流数论辩护的著述,其中以前面已提到的麦克劳林《流数论》最为典型,但所有这些辩护都因坚持几何论证而显得软弱无力. 欧洲大陆的数学家们则力图以代数化的途径来克服微积分基础的困难. 在 18 世纪,这方面的代表人物是达朗贝尔、欧拉和拉格朗日.

达朗贝尔在他为《科学,艺术和工艺百科全书》撰写的"微分"(Differentiel,1754) 等条目中,讨论他所谓的"微分演算的形而上学",即微分学的基础. 他在这里发展了牛顿的首末比方法,但用极限概念代替了含糊的"最初比"与"最终比". 达朗贝尔定义量 Y 的极限为 X,如果"量 Y 可任意逼近 X,这就是说,Y 与 X 之间的差可任意小". 他指出微分演算"仅仅在于从代数上确定我们已通过线段来表达的比的极限",并认为"这也许是关于微分学的最精确、最简洁的定义";欧拉在《微分学》中提出了关于无限小的不同阶零的理论,欧拉认为无限小就是零,但却存在着"不同阶的零",也就是不同阶的无限小,而"无限小演算只不过是不同无限小量的几何比的研究." 他断言如果采取了这种观点,"在这门崇高的科学中,我们就完全能保持最高度的数学严格性";拉格朗日则在《解析函数论》(Theorie des functions analytiques, 1797) 一书中,主张用泰勒级数来定义导数:函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 被定义为展开式

$$f(x+i)=f(x)+pi+qi^2+ri^3+\cdots$$

中 i 的系数,以此作为整个微分、积分演算的出发点而将微积分归结为"纯粹的代数分析艺术". 我们可以说,欧拉和拉格朗日的著作在分析中引入了形式化观点,而达朗贝尔的极限观点则为微积分的严格表述提供了合理内核. 19 世纪的分析严格化,正是这些不同方向融会发展的结果.

7.2 微积分的应用与新分支的形成

18 世纪数学家们一方面努力探索使微积分严格化的途径;一方面又往往不顾基础问题的困难而大胆前进,大大扩展了微积分的应用范围,尤其是与力学的有机结合,已成为 18 世纪数学的鲜明特征之一,这种结合的紧密程度是数学史上任何时期不能比拟的.当时几乎所有数学家都不同程度地同时也是力学家.欧拉的名字同刚体运动与流体力学的基本方程相联系;拉格朗日最享盛名的著作是《分析力学》(Traite de mechanique analitique, 1788),它将力学变成分析的一个分支,拉普拉斯许多最重要的数学成果是包含在他的五大卷《天体力学》(Mecanique céleste,1799—1825)中,这种广泛的应用成为新思想的源泉而使数学本身大大受惠,一系列新数学分支在 18 世纪成长起来.

(一) 常微分方程

常微分方程是伴随着微积分一起发展起来的,牛顿和莱布尼茨的著作中都处理过与常微分方程有关的问题.从 17 世纪末开始,摆的运动、弹性理论以及天体力学等实际问题的研究引出了一系列常微分方程,这些问题在当时往往以挑战的形式被提出而在数学家之间引起热烈的讨论.有名的如悬链线问题:求一根柔软但不能伸长的绳子自由悬挂于两定点而形成的曲线.这问题于 1690 年由雅各布·伯努利提出,第二年莱布尼茨、惠更斯(C. Huygens ,1629—1695)和约翰·伯努利均发表了自己的解答,其中约翰·伯努利通过建立悬链线方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{s}{c},$$

解出了曲线 $y=c\cosh\frac{x}{c}$.类似的还有与钟摆运动有关的"等时曲线"方程(1690,雅各布·伯努利)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{by-a^3}},$$

以及与光线路径问题有关的"正交轨线"方程(1715,莱布尼茨、牛顿)等.

数学家们起初是采用特殊的技巧来对付特殊的方程，但逐渐开始寻找带普遍性的方法.莱布尼茨在1691年已用分离变量法解出了形如 $y\frac{dx}{dy}=f(x)g(y)$ 的方程.1696年他又用变量代换 $z=y^{1-n}$ 将现在所称的“伯努利方程”(1695,雅各布·伯努利)

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)y^n$$

化成了关于 z 和 z' 的线性方程.伯努利兄弟也推进了分离变量法与变量代换法.

解一阶常微分方程 $Mdx+Ndy=0$ 的所谓“积分因子法”，先后由欧拉(1734—1735年间)和克莱洛(1739—1740年间)独立地提出.他们的方法是将方程乘以一个叫“积分因子”的量而使它化为“恰当方程”.恰当方程是指方程左端 $Mdx+Ndy$ 恰好是某个函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$.欧拉和克莱洛都给出方程是恰当的条件:$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$,并指出了如果方程是恰当的，它就可以积分.

因此，到1740年左右，几乎所有求解一阶方程的初等方法都已知道.

在常微分方程早期研究中出现的一类重要的非线性方程是“黎卡提方程”

$$\frac{dy}{dx}+a(x)y^2=f(x),$$

最先由意大利学者黎卡提(J.F.Ricatti)导出(1724).这个方程本身是一阶方程，但黎卡提是通过变量代换从一个二阶方程“降阶”得到它的，这种降阶法后来成为处理高阶方程的主要手段.1728年，欧拉在一篇题为《将二阶微分方程化为一阶微分方程的新方法》的论文中，引进了著名的指数代换将三类相当广泛的二阶常微分方程化为一阶方程，这是二阶常微分方程系统研究的开始.

高阶常微分方程求解的重要突破，是欧拉1743年关于 n 阶常系数线性齐次方程的完整解法.对于 n 阶常系数方程

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}+\cdots+L\frac{d^ny}{dx^n}=0,$$

欧拉利用指数代换 $y = e^{qx}$(q 为常数)得到所谓特征方程

$$A + Bq + Cq^2 + \cdots + Lq^n = 0.$$

当 q 是该方程的一个实单根时,则 ae^{qx} 是原微分方程的一个特解.当 q 是特征方程的 k 重根时,欧拉用代换 $y = e^{qx}u(x)$ 求得

$$y = e^{qx}(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \cdots + \alpha_k x^{k-1})$$

为包含 k 个任意常数的解.欧拉指出:n 阶方程的通解是其 n 个特解的线性组合.他是最早明确区分"通解"与"特解"的数学家.

18 世纪常微分方程求解的最高成就是拉格朗日 1774—1775 年间用参数变易法解出了一般 n 阶变系数非齐次常微分方程.简单情形的参数变易法可追溯到牛顿和约翰·伯努利,欧拉在 1739 年则用此法解出了二阶方程 $y'' + k^2 y = X(x)$.拉格朗日研究一般方程

$$Py + Qy' + Ry'' + \cdots + Vy^{(n)} = X\ ,$$

其中 P、Q、R、…、V、X 皆为 x 的函数.已知相应齐次方程的通解为

$$y = ap(x) + bq(x).$$

此处 a,b 为积分常数而 p,q 是齐次方程的特解.拉格朗日将 a,b 看作 x 的函数并利用 y 的各阶微商表达式及原方程求出 a 和 b,从而得到非齐次方程解.

参数变易法来源于天体力学中的三体问题.三体问题为常微分方程理论提供了持久的刺激.在此问题中扮演中心角色的是一组二阶方程:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -km_i \sum_{j=1}^{3} m_j \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}^3},$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -km_i \sum_{j=1}^{3} m_j \frac{(y_i - y_j)}{r_{ij}^3},$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = -km_i \sum_{j=1}^{3} m_j \frac{(z_i - z_j)}{r_{ij}^3},$$

$i = 1,2,3$;$j \neq i$,m_1,m_2,m_3 分别表示三个球形物体的质量,(x_i,y_i,z_i)表示第 i 个物体质量中心的变动坐标,r_{ij} 为从 m_i 到 m_j 的距离.由于三体问题方程不可能精确地解出,其研究中一个重要的方向就是寻求近似解,即所谓"摄动理论".参数变易法是摄动理论的有力工具.拉普拉斯《天体力学》对三体问题及摄动理论也有重大贡献.

在 18 世纪,由解决一些具体物理问题而发展起来的常微分方程,已经成为有自己的目标与方法的新数学分支.

(二) 偏微分方程

微积分对弦振动等力学问题的应用则引导到另一门新的数学分支——偏微分方程,一般将达朗贝尔 1747 年发表的论文《张紧的弦振动时形成的曲线的研究》(Recherches sur lai courbe que forme une corde tendue mise en vibration) 看作为偏微分方程论的发端. 虽然在达朗贝尔之前,泰勒和约翰 · 伯努利等也曾对弦振动进行过数学描述,但他们均未采用偏导数概念. 达朗贝尔在上述论文中则明确推导出了弦的振动所满足的偏微分方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

并给出了形如

$$u(t,x) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$$

的通解. 达朗贝尔还讨论了初始条件 $u(0,x) = f(x)$,他坚持 18 世纪标准的函数概念(即某种解析表达式) 而要求初始函数和方程的解都是解析的.

达朗贝尔是法国启蒙运动的领头人物之一,曾与哲学家狄德罗(D. Diderot,1713—1784) 共同主编了卷帙浩繁的《科学、艺术和工艺百科全书》(简称《百科全书》,1751—1772). 达朗贝尔原是某贵妇的私生子,出生后被抛弃在巴黎一教堂旁,被一对穷苦的玻璃匠夫妇收养并接受教育,后竟成为巴黎科学院院士和终身秘书.

在达朗贝尔发表他的弦振动研究后不久,欧拉也做了这方面的工作并写成一篇论文《论弦的振动》(1749 年发表),欧拉沿用了达朗贝尔的方法,但引进了初始形状为正弦级数

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

的特解

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

与达朗贝尔不同的是，欧拉允许任意种类的初始曲线，这方面的研究促使他对函数概念进行新的思考.

几年之后，约翰·伯努利之子丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli，1700—1782)也发表了他的《弦振动问题新思考》(1753)，他假定了所有可能的初始曲线均可表为正弦级数，从而弦振动问题所有可能的解都能是正弦周期模式的迭加：

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

丹尼尔的做法受到了达朗贝尔与欧拉的激烈反对，后二者都认为并非每一个函数均能表示成无穷三角级数. 这场围绕着用三角级数表示任意函数的旷日持久的争论，将许多数学家卷了进来，直到19世纪傅里叶级数的工作出现以后才告平息.

欧拉、拉格朗日等在研究鼓膜振动与声音传播时还导出了二维和三维波动方程.

18世纪获得的另一类重要的偏微分方程是位势方程，这与当时另一类热门的力学问题——计算两个物体之间的引力相关. 拉普拉斯在1785年发表的论文《球状物体的引力理论与行星形状》中，引进了标量函数 V，它与引力分量 F_x,F_y,F_z 之间有关系：

$$F_x=\frac{\partial V}{\partial x},\quad F_y=\frac{\partial V}{\partial y},\quad F_z=\frac{\partial V}{\partial z}.$$

拉普拉斯在该文中在球坐标下推导了 V 满足的方程，稍后(1787)他又给出了这方程的直角坐标形式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

这就是所谓“位势方程”，现在通常就称“拉普拉斯方程”. 欧拉1752年在研究流体内部任一点速度问题时也曾得出同样的方程，但他不知道怎样求解，拉普拉斯首先用球调和函数解出了位势方程. 位势理论主要是经拉普拉斯的工作才引起普遍关注，并由格林、高斯等发展为数学物理的重要部分.

拉普拉斯对数学物理的影响是巨大的. 通常认为他偏爱应用而对纯粹数学不感兴趣. 在拉普拉斯的著作中，确实经常用“容易看出”这

样的轻松一笔来代替对所得数学结论的严格证明.这往往使阅读他的著作的人感到头痛,但拉普拉斯有自己的想法.他在另一部著作《概率的解析理论》"绪论"中曾这样写道:"分析和自然哲学中最重大的发现都应归功于这种丰富多产的方法,也就是所谓的'归纳'方法.牛顿二项式定理和万有引力原理就是归纳法的成果".与18世纪的其他数学家相比,拉普拉斯更醉心于发现结果而淡出证明,不过无论如何,数学在他心目中有特殊的地位,因为他说过:"一切自然现象都是少数不变定律的数学推论".



图7.2 拉普拉斯

拉普拉斯是法国诺曼底地区的农家子弟,达朗贝尔帮助他当上了巴黎军事学校数学教授,后来与拉格朗日(Lagrange)和勒让德(Legendre)并称"巴黎三L".1827年逝世,据说留下的遗言是:"我们知道的,是很微小的;我们不知道的,是无限的."

(三)变分法

在18世纪出现的数学新分支中,变分法的诞生最富有戏剧性.变分法起源于"最速降线"和其它一些类似的问题.所谓最速降线问题,是要求出两点之间一条曲线,使质点在重力作用下沿着它由一点至另一点降落最快(即所需时间最短).这问题最早由约翰·伯努利提出来向其他数学家挑战,刊登在1696年6月《教师学报》上.问题提出后半年未有回音,他遂于1697年发表著名的元旦《公告》,再次向"全世界最有才能的数学家"挑战.《公告》中有一段话说:"能够解决这一非凡问题的人寥寥无几,即使是那些对自己的方法自视甚高的人也不例外".这段话被认为是隐射牛顿的.牛顿于1月29日从造币局回到住所,从一封法国来信中看到了伯努利的挑战,他利用晚饭后的时间一举给出了正确的解答——摆线(或称旋轮线).牛顿将结果写成短文匿名发表在《哲学汇刊》(Philosophical Transaction,1 No.224)上,伯努利看到后

拍案惊呼:“从这锋利的爪我认出了雄狮!”差不多同时,莱布尼茨、洛必达(G.F.A.L'Hospital,1661—1704)、雅各布·伯努利以及约翰·伯努利本人也都得到了正确的解答,他们的解答都刊登在同年5月的《教师学报》上.用现代符号表示,最速降线问题是相当于求函数 $y(x)$,使表示质点从 $A(x_1,y_1)$ 到 $B(x_2,y_2)$(如图7.3)下降时间的积分

$$J=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{y(x)-\alpha}}\mathrm{d}x$$

取最小值,其中 g 是重力加速度,α 是与初始坐标及速度有关的常数($\alpha=y_1-v_1/2g^2$).伽利略曾解过这个问题,但误认为答案是一段圆弧.牛顿和雅各布·伯努利等人的研究意义不仅是在于给出了正确的答案摆线,更重要的是揭示了这一问题区别于普通极值问题的特征.因此这些工作与同时期出现的等周问题(求具有给定弧长的曲线,使其所围面积最大,属带附加条件的变分问题),测地线问题(求曲面上两点之间的最短路径)等一道标志着一门新数学分支——变分法的诞生.

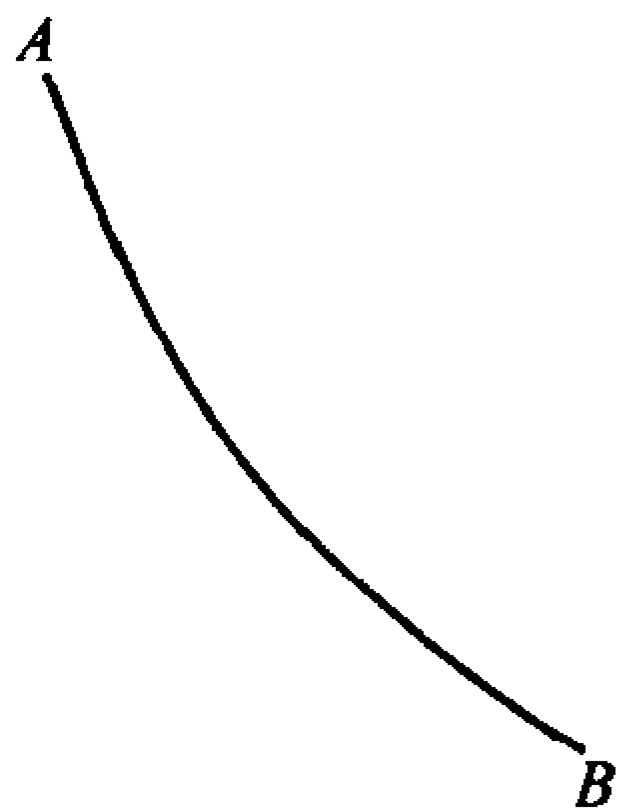


图7.3

变分法处理的是一个全新的课题:求变量

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2}f(y,y',x)\mathrm{d}x$$

的极大或极小值,这个变量(积分)与通常函数有本质区别,即它的值依赖于未知函数而不是未知实数.也就是说,如果将 $J(y)$ 看作是“函数”,那么可以说它是“函数的函数”.欧拉对于变分问题给出了一般的处理.他在1744年发表的《求某种具有极大或极小性质的曲线的技巧》一书中,将积分 $J=\int_{x_1}^{x_2}f(y,y',x)\mathrm{d}x$ 取极值的问题看作是求函数

$$W_n(y_0,y_1,\cdots,y_n)=\sum_{k=0}^{n-1}F(x_k,y_k,\frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x})\Delta x$$

的通常极值当 $n\to\infty$ 时的极限情形(此处,$x_k=a+k\Delta x,\Delta x=$

$\frac{b-a}{n}, k=0,1,\cdots,n$),从而导出了使积分 J 达到极值的函数 y 所必须满足的必要条件,即

$$f_y - f_{y'x} - f_{y'y}y' - f_{y'y'}y'' = 0 .$$

这个二阶常微分方程后来就叫"欧拉方程",至今仍为变分法的基本方程.欧拉的工作奠定了变分法的这门新学科的独立基础.

欧拉的变分法在许多地方还依赖于几何论证.变分法的另一位奠基人拉格朗日则在纯分析的基础上建立变分法.拉格朗日在1760年发表的《论确定不定积分式的极大和极小值的一个新方法》中,首创了函数 y 的"变分"(variation)概念,并用记号 δ 表示.他考虑由 $y(x)$ 变化而来的,通过端点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的新曲线 $y(x)+\delta y(x)$(这与欧拉等改变极值化曲线的个别坐标的做法不同),然后运用整个分析工具导出了使 J 取极值的必要条件:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 ,$$

这与欧拉的方程一致.拉格朗日还第一次成功地处理了端点变动的极值曲线问题及重积分情形,1770年以后又研究了被积函数中含有高阶导数的变分问题,这些后来都成为变分法的标准内容.拉格朗日的工作使由最速降线等特殊问题发展起来的变分法名符其实地成为分析的一个独立分支.

拉格朗日生于意大利都灵,19岁就被任命为都灵炮兵学校数学教授.欧拉和达朗贝尔力荐他到柏林科学院任职.普鲁士王弗里德里克写信邀请拉格朗日说:"欧洲最大之王希望欧洲最大的数学家到宫中为伴".从1766年到1787年,拉格朗日长期在柏林科学院服务.弗里德里克死后,他接受法王路易十六之邀到巴黎定居.法国大革命期间,革命政府驱走了所有的外籍院士,却破例让拉格朗日留下来并负责法国的度量衡改革.



图 7.4 拉格朗日

在 18 世纪,微分方程,变分法等上述这样一些新的分支与微积分本身一起,形成了被称之为“分析”的广大领域,与代数、几何并列为数学的三大学科,并且在这个世纪里,其繁荣程度远远超过了代数和几何.18 世纪数学家们不仅大大开拓了分析的疆域,而且赋予它与几何相对的意义,他们力图用纯分析的手法以摆脱几何论证的束缚,这种倾向成为 18 世纪数学的又一大特征,在拉格朗日的工作中达到了登峰造极的程度.拉格朗日在他的《分析力学》中声称:“这本书中找不到一张图,我所叙述的方法既不需要作图,也不需要任何几何的或力学的推理,只需要统一而有规则的代数(指分析)运算”.

7.3 18 世纪的几何与代数

分析的光芒使 18 世纪综合几何的发展暗然失色,但分析方法的应用却开拓出了一个崭新的几何分支 —— 微分几何,从而改变了 18 世纪几何学的面貌.“代数”在 18 世纪数学家心目中则是“分析”的同义语,他们将分析看作是代数的延伸,代数本身的研究有时便服从于分析的需要.在这样的情况下,18 世纪代数学仍然为下一世纪的革命性发展作了必要的准备.

(一) 微分几何的形成

微积分的创始人已经利用微积分研究曲线的曲率、拐点、渐伸线、渐屈线等而获得了属于微分几何范畴的部分结果.但微分几何成为独立的数学分支主要是在 18 世纪.

1731 年十八岁的法国青年数学家克莱洛发表《关于双重曲率曲线的研究》,开创了空间曲线理论,是建立微分几何的重要一步.克莱洛通过在两个垂直平面上的投影来研究空间曲线,首先提出空间曲线有两个曲率的想法.他认识到一条空间曲线在一个垂直于切线的平面上可以有无穷多条法线,同时给出了空间曲线的弧长公式与某些曲面的面积求法.

欧拉是微分几何的重要奠基人.他早在 1736 年就引进了平面曲线

的内在坐标概念，即以曲线弧长作为曲线上点的坐标. 在《无限小分析引论》第 2 卷中则引进了曲线的参数表示：

$$x = x(s);\quad y = y(s);\quad z = z(s).$$

欧拉将曲率定义为曲线的切线方向与一固定方向的交角相对于弧长的变化率，并推导了空间曲线任一点曲率半径的解析表达式

$$\rho = \frac{\mathrm{d}s^2}{\sqrt{(\mathrm{d}^2x)^2 + (\mathrm{d}^2y)^2 + (\mathrm{d}^2z)^2}}.$$

欧拉的曲率定义是对克莱洛引进的空间曲线的两个曲率之一的标准化(另一个曲率，现在叫“挠率”，其解析表示到 19 世纪初才得到). 欧拉关于曲面论的经典工作《关于曲面上曲线的研究》(Recherches sur la courbure des surfaces ,1760) 被公认为微分几何史上的一个里程碑. 欧拉在其中将曲面表示为 $z = f(x,y)$，并引进了相当于

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\quad q = \frac{\partial z}{\partial y,},\quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x},\quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

的标准符号. 欧拉正确地建立了曲面的曲率概念. 他引进了法曲率(法截线的曲率)，主曲率(所有法截线的最大和最小曲率)，并得到了法曲率的欧拉公式 $\chi = \chi_1 \cos^2\alpha + \chi_2 \sin^2\alpha$(其中 χ_1, χ_2 是主曲率，α 是一法截面与主曲率所在法截面的交角). 1771 年以后，欧拉还率先研究了他所谓“可展平在一张平面上” 的曲面即可展曲面，导出了可展性的充分必要条件.

18 世纪微分几何的发展由于蒙日的工作而臻于高峰. 蒙日 1795 年发表的《关于分析的几何应用的活页论文》(Feuilles d′analyse appliquéeà la géometrie) 是第一部系统的微分几何著述. 蒙日极大地推进了克莱洛、欧拉的空间曲线与曲面理论，其特点是与微分方程的紧密结合. 曲线与曲面的各种性质用微分方程来表示，有共同几何性质或用同一种方法生成的一簇曲面应满足一个偏微分方程. 蒙日借着这些偏微分方程对曲面簇、可展曲面及直纹面进行研究而获得了大量深刻的结果. 例如，他给出了可展曲面的一般表示，并说明除了垂直于 xy - 平面 的柱面外，这种曲面总满足偏微分方程

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0 .$$

他还给出了直纹面满足的三阶偏微分方程,利用这些方程的积分,蒙日证明了欧拉未能证明的事实:可展曲面是特殊的直纹面,并知道逆命题是不成立的.

与18世纪大多数数学家不同的是,蒙日不仅是将分析应用于几何,同时也反过来用几何去解释微分方程从而推动后者的发展,他开创了偏微分方程的特征理论,引进了探讨偏微分方程的几何工具——特征曲线与特征锥(现称“蒙日锥”)等,它们至今仍是现代偏微分方程论中的重要概念.

蒙日是18世纪少有的对几何与分析予以同等重视的数学家,他和他领导的法国几何学派的工作对于18世纪末、19世纪初综合几何的复兴有重要的影响.蒙日是著名的巴黎多科工艺学校的创始人之一,并任首任校长.他在那里开设的画法几何课,听课人数每次多达四百余名.蒙日是法国大革命时期的激进派,做过革命政府的海军部长,曾签署了处决路易十六的报告书.他也是拿破仑军营中最有威信的科学参谋.王政复辟后,蒙日被剥夺了一切职务,不久谢世.

与微分几何相联系的解析几何在18世纪也有长足的进步.特别是帕伦(A. Parent)在1705、1713年将解析几何推广到三维情形,该项工作被克莱洛所继续.解析几何在18世纪突破了笛卡儿以来作为求解几何难题的代数技巧的界限.

(二)方程论及其他

18世纪代数学的主题仍然是代数方程.

在这世纪的最后一年,年青的高斯在他的博士论文《每个单变量有理整函数均可分解为一次或二次实因式积的新证明》(Damonstratio nova theoramatic omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi graduo revolvi posse, 1799)中公布了代数基本定理的第一个实质性证明,高斯的这一成果可以看作是18世纪方程论的一个漂亮的总结.代数基本定理断言 n 次代数方程恰有 n 个根,它最早是由荷兰数学家吉拉德(A. Girard)于1629年提出,后经笛卡儿,牛顿等众多学者反复陈述、应用,但均未给

出证明.到18世纪,由于有理函数的积分涉及多项式的因式分解,又强烈刺激了数学家们证明这一定理的愿望.欧拉、拉格朗日等名家都先后试过身手,竟均告败北.高斯的证明另辟新径,他将多项式方程的根与复平面上的点对应起来,并说明它们是某些曲线的交点,然后证明了交点必然存在.[①]高斯的这个证明是纯粹存在性的,而在他之前,自古希腊以来几乎所有的数学家都是通过实际构造出一个问题的解来显示其存在.当然高斯的第一个证明在逻辑上仍不完美,其中用到了与连续函数和代数曲线连续性有关的事实而未作证明,他只是说"据我所知,没有人对此表示怀疑".高斯后来又给出了代数基本定理的另外三个不同的证明.

18世纪代数方程论发展的另一个方向是高次方程根式可解性问题的探讨.这个文艺复兴以来的难题,不像代数基本定理那样幸运,能够在18世纪奏响解决的凯歌,但这个世纪的数学家们还是做出了历史性贡献,其中拉格朗日的工作最为重要.拉格朗日在1770年发表长篇论文《关于代数方程解的思考》,他在其中探讨一般三、四次方程能根式求解的原因,发现三次方程有一个二次辅助方程,其解为原三次方程根的函数并且在根的置换下仅取两个值;四次方程则有一个三次辅助方程,其解在原方程根的置换下仅取三个不同值.他称这些辅助方程的解为原方程根的"预解函数",并试图进一步将上述方法推广到五次和五次以上的方程.他继续寻找五次方程的预解函数并希望它是低于五次的方程的解,但没有成功,因而猜测高次方程一般不能根式求解.拉格朗日最有启发性的思想是研究根的对称函数并考虑一个有理函数当其变量发生置换时取值的个数,这蕴含了置换群的概念.到了这个世纪的最后一年,意大利的鲁菲尼(P. Ruffini,1765—1822)用拉格朗日的方法证明了不存在一个预解函数能满足一个次数低于五次的方程,并明确提出要证明高于四次的一般方程不可能用代数方法求解.18世纪的数学家可以说已经走到了成功的边缘,他们虽然未能达到目标,却为下一世纪的最终冲刺指明了方向.

① 参见李文林主编:《数学珍宝——历史文献精选》,p.471 ~ 470.科学出版社,1998.

18 世纪代数方程发展的第三个方向是方程组理论.

首先是线性方程组与行列式理论. 莱布尼茨的行列式及其在线性方程组消元中的应用的思想得到了发展. 瑞士数学家克拉默(G. Cramer, 1704—1752)在《代数曲线分析引论》(1750)一书中提出了由系数行列式来确定线性代数方程组解的表达式的法则,就是我们今天常用的"克拉默法则"(麦克劳林在 1748 年也得到了同样法则). 行列式理论后来被法国数学家范德蒙德(A. T. Vandermonde, 1735—1796)系统化了. 范德蒙德的研究(1772)使行列式与线性方程组求解相分离而成为独立的数学对象,因此他被认为是行列式理论的奠基人(行列式理论在 19 世纪又被柯西、凯莱和西尔维斯特等人进一步发展. "行列式"[determinant]这个名称是柯西 1815 年首先提出的,凯莱则于 1841 年首先创用了行列式记号|　|.). 范德蒙德也将行列式用于线性方程组求解,并给出了一条法则,用二阶子行列式及其余子式来展开行列式,这法则后来被拉普拉斯推广到一般情形而称为"拉普拉斯展开". 范德蒙德也是最早注意到研究代数方程根的对称函数对于解决四次以上方程根式求解问题的重要性的学者之一,因而在数学史文献中,常常与拉格朗日一起被列为群论的先行者.

与方程论相联系的是人们对数的认识. 18 世纪的数学家还谈不上有完整的数系概念和建立数系的企图. 他们在具体的研究中已经认识了整数、有理数、无理数和复数,但对接受负数与复数还存在疑虑与争议. 18 世纪在弄清复数的意义方面是有功绩的. 如 7.1 中所述,复数已进入了几乎所有的初等函数领域,并且在应用上卓有成效;达朗贝尔在 1747 年关于一切复数均可以表示成形式 $a + bi$ 的断言也被多数人接受,虽然他的论证还不够严密;高斯对代数基本定理的证明假定了复数与平面上点的对应,这也加强了复数的地位. 但是,笼罩着虚数的疑云,要等到复数的几何表示明确地建立起来并获得广泛传播之后才能被驱散. 1797 年,丹麦数学家韦塞尔(C. Wessel, 1745—1818)在《方向的解析表示》一文中曾创造了这种几何表示,他用 $\in$ 表示 $\sqrt{-1}$, $a + \in b$ 相当于平面上从原点出发、另一端坐标为 (a, b) 的直线段. 他还发展了 $a + \in b$ 的运算法则. 但韦塞尔的文章是用丹麦文发表的,在当时没有

引起重视. 1806年瑞士人阿尔冈(R. Argand)、1831年高斯又各自独立地发表了关于复数几何表示的研究,其中高斯的工作对于人们普遍接受复数概念影响尤大. 但即使是这样,1831年伦敦大学数学教授德摩根(A. De Morgan, 1806—1871)在《论数学的研究和困难》一文中仍认为虚数和负数"二者都是同样的虚构,因为 $0-a$ 和 $\sqrt{-a}$(a 为正数)同样是不可思议的".

18世纪数学家在澄清无理数的逻辑基础方面没有进展,但他们以相对平静的态度接受了一些数的无理性. 欧拉在1737年证明了e是无理数. 他的证明以连分数为基础. 他得到e的连分数展开:

$$e = 2 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\cdots .$$

因为他已经证明了每一个有理数都能表示成一个有限的连分数,所以e必定是无理数. 1761年兰伯特(J. G. Lambert, 1728—1777)用类似方法证明了π是无理数. 稍后勒让德甚至猜测说π可能不是任何有理系数方程的根. 这促使数学家们将无理数区分为代数数和超越数. 任何有理系数代数方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 的任何一个根叫代数数(包括了全体有理数和一部分无理数). 不是代数数的数叫做超越数,因为欧拉说过:"它们超越了代数方法的能力". 但在18世纪,数学家们还没有找到任何一个具体的超越数. 直到1844年,法国数学家刘维尔(J. Liouville, 1809—1882)才第一次真正地显示了超越数的存在,他证明了形如 $\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \frac{a_3}{10^{3!}} + \cdots$ 的数($a_1, a_2, a_3, \cdots$ 为从0到9的任意整数)都是超越数. 1873年和1882年,法国数学家埃尔米特(C. Hermite, 1822—1901)和德国数学家林德曼又分别证明了e和π的超越性.

(三) 数论进展

虽然古希腊、中国与印度的数学著作中不乏数论问题与结果的记述,但近代意义的数论研究是从费马开始的. 费马提出了一堆定理,这些定理,毋宁说是猜想,因为费马只对其中个别命题留下了自己的证明. 这些猜想,使数学家们忙碌了好几个世纪,有的至今仍为现代数论

饶有兴趣的课题,下面是费马提出的部分"定理".

(1) 费马小定理:如果 p 是素数,a 与 p 互素,则 $a^p - a$ 可以被 p 整除.

这是费马在1640年10月18日致德贝西(B. Frenicle de Bessy)的一封信中提出的.

(2) 费马大定理:方程

$$x^n + y^n = z^n$$

对任意大于2的自然数 n 无整数解.

这是费马在阅读巴歇(C. - G. Bachet)校订的丢番图《算术》时做的页边批注(参见第2章),费马在批注中称:"我已找到了一个奇妙的证明,但书边空白太窄,写不下".1670年费马之子萨缪尔(Samuel)连同其父的批注一起出版了巴歇校订的书的第二版,遂使费马这一猜想公诸于世.费马究竟有没有找到证明?已成为数学史上的千古之谜.从那时起,为了"补出"这条定理的证明,数学家们花费了三个多世纪的心血.

(3) 平方数问题:(i) 每个 $4n+1$ 形的素数和它的平方都只能以一种方式表示为两个平方数之和;每个 $4n+1$ 形的素数的三次方和四次方都能以两种方式;其五次方和六次方都能以三种方式,如此等等,以至无穷.如 $n=1$ 时,$5=2^2+1^2, 5^2=3^2+4^2, 5^3=2^2+11^2=5^2+10^2$,等等,(ii) 每个正整数可表示成四个或少于四个平方数之和.

(4) 费马数:$F_n = 2^{2^n}+1, n=0,1,2,3,\cdots$.费马在1640年给梅森的一封信中断言"形如 $2^{2^n}+1$ 的数永远是素数."

(5) 方程 $x^2 - Ay^2 = 1$ 当 A 是正数但非完全平方数时有无穷多个(整数)解.这是费马在1657年2月给德贝西的一封信中提出来向其他数学家挑战的问题.欧拉将这方程归功于英国人佩尔(J. Pell, 1611—1685),现在就称这类方程为"佩尔方程",实际上佩尔并没有研究过这类方程.

费马还研究过完全数、亲和数等.

18世纪的数论研究可以说是受到了费马思想的主宰,这一时期得到的许多结果,都与证明费马提出的那些"定理"有关.

首先是欧拉在 1732 年推翻了费马关于费马数的结论，他证明 $n=5$ 时，$F_5=2^{2^5}+1$ 不是素数，它有一个因子是 641. 实际上，后来人们发现费马关于费马数的结论是大错特错，现在知道对从 5 到 16 的所有 n，F_n 都是合数，对其它许多 n 值亦然！

接着欧拉在 1736 年证明了费马小定理是正确的.

1753 年，欧拉在致哥德巴赫(C. Goldbach，1690—1764) 的一封信中宣布证明了 $n=3$ 时的费马大定理，欧拉的证明后发表在他的《代数指南》(1770) 一书中.

费马关于平方和数的上述两个命题先后被欧拉(1754) 和拉格朗日(1770) 证明了. 拉格朗日还在 1766 年证明了佩尔方程解的存在性，而欧拉在这个问题上的尝试却失败了.

在所有这些证明中，我们只提一提欧拉对 $n=3$ 时费马大定理的证明. 这个证明以所谓"无限下降法" 为基础，并依赖于 $a+b\sqrt{-3}$ 形式的复数. 欧拉用到的一个关键事实是：在由 $a+b\sqrt{-3}$ 形式的数所形成的数系(记为 $\{a+b\sqrt{-3}\}$，a，b 为任意整数) 中，有唯一因子分解定理成立，即每一个整数都可唯一地分解为这个数系中数的乘积. 后来才知道，对形如 $\{a+b\sqrt{-n}\}$ 的数系，唯一因子分解定理并不总是成立的，例如在数系 $\{a+b\sqrt{-5}\}$ 中，$6=3\times 2=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$，有两种分解方式. 事实上，能保证唯一因子分解定理成立的数系 $\{a+b\sqrt{-n}\}$ 只有 9 种，$\{a+b\sqrt{-3}\}$ 恰在其中. 欧拉当时并不知道这个规律，他对 $n=3$ 时费马大定理的证明，多少是靠了运气才没有铸成错误. 如果将欧拉的方法推广到 $n=5$ 的情形，自然就要用到 $\{a+b\sqrt{-5}\}$ 这样的数系，他的方法就失效了.

至于无限下降法，它是费马的发明. 费马曾使用这种方法证明了一条定理：边长为整数的直角三角形其面积不可能是整数的平方. 这是费马唯一写出了证明过程的定理. 证明大意是：令 x，y，z 为直角三角形的边长，z 是斜边，则有 $x^2+y^2=z^2$. 设三角形面积为 u^2，u 是整数，三角形面积应为 $u^2=\frac{1}{2}xy$. 依靠一套巧妙的推理，费马导出了另一组正

整数 X_1, Y_1, Z_1 和 U_1，使得 $X_1^2 + Y_1^2 = Z_1^2, U_1^2 = \frac{1}{2}X_1Y_1$，且有 $Z_1 < z$. 因为 X_1, Y_1, Z_1 与 x, y, z 有同样性质，故根据同样推理可导出另一组正整数 X_2, Y_2, Z_2, U_2 使 $X_2^2 + Y_2^2 = Z_2^2, U_2^2 = \frac{1}{2}X_2Y_2$，且有 $Z_2 < Z_1$. 这一推理过程可以无限继续下去. 这种方法被称为无限下降法，因为正整数 $z, Z_1, Z_2, \cdots$ 越来越小. 这将引出矛盾，因为不可能有无限下降的正整数序列，所以结论只能是：不存在面积为某个整数的平方而边长均为整数的直角三角形.

费马在给他的朋友德加卡维(P. de Carcavi)的一封信中曾宣称他用无限下降法证明了 $n = 4$ 时的费马大定理及其它一些定理，但他没有写出证明过程. 德贝西根据费马的提示在 1676 年给出了 $n = 4$ 时费马大定理的无限下降法证明. 无限下降法在 18 世纪成为一种证明数论问题的有用技巧，欧拉、拉格朗日、勒让德等都普遍地使用这一方法.

18 世纪数学家们也提出自己的猜想，其中最著名的是哥德巴赫猜想与华林问题.

德国数学家哥德巴赫与欧拉有长达 35 年的书信交往，许多重要成果就是通过这种方式记录下来. 1742 年 6 月 7 日他在给欧拉的一封信中写道："我不相信关注那些虽没有证明但很可能正确的命题是无用的，即使以后它们被验证是错误的，也会对发现新的真理有益." 然后他说"我也想同样冒险提出一个假设". 哥德巴赫的假设相当于说：

每个偶数是两个素数和；每个奇数是三个素数之和.

这就是著名的哥德巴赫猜想[①]. 哥德巴赫的原始陈述相当含糊，欧拉将其进一步明确化，但却未能证明这个命题. 上述的形式是英国数学家华林 (E, Waring, 1734—1798) 在他的《代数沉思录》(Meditationes algebraica, 1770) 中首先给出的. 华林在同一著作中还提出了他自己的一个猜想：

任一自然数 n 可表示成至多 r 个数的 k 次幂之和，即 $n = x_1^k +$

① 哥德巴赫猜想的略经修改的较严格的现代表述为：每个不小于 9 的奇数可以表示成三个奇素数之和；每个不小于 6 的偶数可以表示成二个奇素数之和.

$x_2^k + \cdots + x_r^k$,其中 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 为自然数,r 依赖于 k.
华林举出了一些特例,如每个自然数或者是4个平方数之和,或者是9个立方数之和,或者是19个四次方数之和,等等,但均未给出证明.此猜想后以“华林问题”著称.哥德巴赫猜想、华林问题与费马的那些猜想一样为后世数论研究提供了持久的刺激.华林问题1909年才由希尔伯特首次证明,哥德巴赫猜想则至今悬而未决.

18世纪数论还有两项深刻的工作需要特别提到,它们都属于欧拉.一个是欧拉在1737年导出的恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left[1/(1 - \frac{1}{p^s})\right],$$

其中 $s > 1$,n 取遍所有的正整数,p 取遍所有素数.欧拉是利用算术基本定理(即每个合数可以唯一地表成素数的乘积)证明这一恒等式的,并且又用这一恒等式证明了素数个数无穷.该恒等式在数论与分析之间架起了桥梁,是解析数论的肇端.右式函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 后被黎曼推广到 s 取复值的情形,现称黎曼 - ζ 函数,是现代解析数论的主要工具.

欧拉另一项工作是他在1743年发现的二次互反律.二次互反律诚如欧拉本人预言的那样,在19世纪成为数论研究的重要课题并引出了“许多伟大的结果”,从而开启了数论的一个新领域——代数数论.我们将在第8章中介绍.

18世纪的数论是一些分散但却引人入胜的结果与猜想的记录,也许在17、18世纪数学家们提出的数论问题比解决的更多些,然而我们已经并将进一步看到,19世纪数论两大领域——解析数论与代数数论的系统发展,都可以在18世纪找到根源.

从17世纪初开始,数学经历了近两个世纪的开拓.在18世纪行将结束的时候,数学家们对自己从事的这门科学却奇怪地存在着一种普遍的悲观情绪.拉格朗日在1781年写给达朗贝尔的一封信中说:“在我看来似乎(数学的)矿井已经挖掘很深了,除非发现新的矿脉,否则迟早势必放弃它,……科学院中几何学(指数学)的处境将会有一天变成目前大学里阿拉伯语的处境一样,那也不是不可能的”.欧拉和达朗贝

尔同意拉格朗日的观点.法国法兰西学院一份《关于1789年以来数学科学进展的历史及其现状的报告》更是预测在数学的“几乎所有的分支里,人们都被不可克服的困难阻挡住了;把细枝末节完善化看来是剩下来唯一可做的事情了,所有这些困难好象是宣告我们的分析的力量实际上是已经穷竭了”.

这种世纪末悲观主义的由来,可能是因为17、18世纪数学与天文力学的紧密结合,使部分数学家把天文与力学看成是数学发展的几乎唯一的源泉,而一旦这种结合变得相对滞缓和暂时进入低谷,就会使人感到迷失方向.当然也有人看到了曙光,孔多塞在1781年写道:“不应该相信什么我们已经接近了这些科学必定会停滞不前的终点,…… 我们应该公开宣称,我们仅仅是迈出了万里征途的第一步”!

代数学的新生

8

18世纪末出现的数学悲观主义具有深刻的认识论背景.从根本上说,数学的发展与人类的生产实践和社会需求密切相关,对自然的探索是数学研究最丰富的源泉,而几乎所有数学分支中那些最初的和最古老的问题都是由外部世界产生的.但是,数学的发展对于现实世界又表现出相对的独立性.一门数学分支或一种数学理论一经建立,人们便可在不受外部影响的情况下,仅靠逻辑思维而将它向前推进,并由此导致新理论与新思想的产生.因此,内在逻辑的需要也是数学进步的重要动力之一.数学悲观主义的出现恰恰表明,以揭示自然和宇宙的"数学设计"为己任的17、18世纪的数学家们过于将数学的进展与天文、力学的进展等同起来,对于数学靠内在逻辑需要推动而发展的前景则缺乏充分的预见.

实际上,就在18世纪后半叶,数学内部悄悄积累的矛盾已经开始酝酿新的变革.当时数学家们面临一系列数学发展进程中自身提出的、长期悬而未决的问题,其中最突出的是:

1.高于四次的代数方程的根式求解问题;

2.欧几里得几何中平行公理的证明问题;

3.牛顿、莱布尼茨微积分算法的逻辑基础问题.

在19世纪初,这些问题已变得越发尖锐而不可回避.它们引起数学家们集中的关注和热烈的探讨,并导致了数学发展的新突破.与上世纪末人们的悲观预料完全相反,数学在19世纪跨入了一个前所未有、突飞

猛进的历史时期.以下我们就以代数、几何、分析这三大领域的变革为主要线索,分3章来介绍19世纪数学的发展.本章要介绍的是代数学中的革命性变化.

8.1 代数方程的可解性与群的发现

我们曾在前面讲过,中世纪的阿拉伯数学家把代数学看成是解代数方程的学问.直到19世纪初,代数学研究仍未超出这个范围.不过这时数学家们的注意力集中在了五次和高于五次的代数方程上.我们知道,二次方程的解法古巴比伦人就已掌握.在中世纪,阿拉伯数学家又将二次方程的理论系统化.而三、四次方程的求解曾在文艺复兴时期的意大利引起数学家之间的激烈挑战并获得解决.接下来,数学家自然要考虑一般的五次或更高次的方程能否像二、三、四次方程一样来求解,也就是说对于形如

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

(其中 $n \geqslant 5$) 的代数方程,它的解能否通过只对方程的系数作加、减、乘、除和求正整数次方根等运算的公式得到呢?在解出三、四次方程后的整整两个半世纪内,很少有人怀疑五次或五次以上方程根式求解的可能性.但是所有寻求这种解法的努力都失败了.历史上,第一个明确宣布"不可能用根式解四次以上方程"的数学家是拉格朗日.拉格朗日在1770年发表的《关于代数方程解的思考》一文,讨论了在他之前人们所熟知的解二、三、四次方程的一切解法,并且指出这些成功解法所根据的情况对于五次及更高次方程是不可能发生的(参见7.3).拉格朗日试图得出这种不可能性的证明,然而经过顽强的努力(他的论文长达200页)之后,拉格朗日不得不坦言这个问题"好象是在向人类的智慧挑战".

迎接这一挑战的是在拉格朗日的文章发表过后半个多世纪,来自挪威的一位年青人.1824年,年仅22岁的数学家阿贝尔(N. H. Abel,1802—1829)自费出版了一本小册子《论代数方程,证明一般五次方程

的不可解性》,在其中严格证明了以下事实:如果方程的次数 $n \geqslant 5$,并且系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 看成是字母,那么任何一个由这些字母组成的根式都不可能是方程的根.这样,五次和高于五次的一般方程的求解问题就由阿贝尔解决了.他还考虑了一些特殊的能用根式求解的方程,其中的一类现在被称为"阿贝尔方程".在这一工作中,他实际上引进了"域"(field)这一重要的近世代数概念,虽然他没有这样来称呼.

阿贝尔只活了 27 岁.他一生贫病交加,但却留下了许多创造性贡献.除方程论外,他还是椭圆函数论的创始人之一,但这些工作在他生前均未受到重视.阿贝尔大学毕业后长期找不到工作.1829 年,柏林大学终于认识到阿贝尔的才华,决定任命他为教授,但当聘书寄达时,阿贝尔已因肺结核不治在两天前离开了人世.



图 8.1 阿贝尔

阿贝尔关于代数方程的工作只是证明对于一般的五次和五次以上方程根式解是不可能的,但并不妨碍人们去求一些特殊的代数方程,比如阿贝尔方程的根式解.在阿贝尔的工作之后,数学家所面临的一个问题就是:什么样的特殊方程能够用根式来求解?这个问题稍后被一位同样年青的法国数学家伽罗瓦(E. Galois, 1811—1832)解决.伽罗瓦在 1829—1831 年间完成的几篇论文中,建立了判别方程根式可解的充分必要条件,从而宣告了方程根式可解这一经历了三百年的难题的彻底解决.

伽罗瓦的思想是将一个 n 次方程

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

的 n 个根(由代数基本定理可知)$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 作为一个整体来考察,并研究它们之间的排列或称"置换".

为了容易理解起见,我们以四次方程的四个根 x_1,x_2,x_3,x_4 为例,在包含这些 x_i 的任何表达式中交换 x_1 和 x_2 就是一个置换,用

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

来表示. 另一个置换用

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

表示. 第一个置换后再实行第二个置换, 等价于实行第三个置换

$$P_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} .$$

这是因为(以 x_1 为例), 由第一个置换 x_1 变成 x_2, 由第二个置换 x_2 又变成 x_4, 而由第三个置换 x_1 直接变换成 x_4. 我们说头两个置换按上述顺序作成的"乘积"就是第三个置换, 即 $P_1 \cdot P_2 = P_3$. 对于四次方程的情形, 易知共有 $4! = 24$ 个可能的置换. 这些置换的全体构成一个集合, 而其中任意两个置换的乘积仍是原来集合中的一个置换, 伽罗瓦称之为"群". 这是历史上最早的"群"的定义, 不过它只是针对一个具体的群(置换群)所作的定义, 还不是抽象群的一般定义. 但伽罗瓦正是利用他提出的群的概念来解决方程根式可解性问题的.

进一步考虑一个方程根的置换群中某些置换组成的"子群". 这个群, 伽罗瓦称之为"方程的群", 也就是我们今天所说的"伽罗瓦群". 它的含义如下: 考虑由方程系数的有限次加、减、乘、除运算可能得到的一切表达式的集合. 这个集合, 现在叫方程的"基本域", 并记为 $F = Q(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, Q 为有理数域, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是方程的系数, 但伽罗瓦没有用"域"这个名称. 伽罗瓦群就是由方程的根的置换群中这样一些置换构成的子群, 这些置换保持方程的根的以 F 的元素为系数的全部代数关系不变. 我们以四次方程为例来说明这个重要的概念.

设方程

$$x^4 + px^2 + q = 0 ,$$

其中 p, q 是独立的, 令 F 是 p, q 的有理表达式形成的域(基本域), 如 $\frac{3p^2 - 4q}{q^2 - 7p}$ 就是这样一个表达式. 这个方程的四个根:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}},$$

$$x_3=\sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}},\quad x_4=-\sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}}$$

是我们已经知道的,并且容易看出这些根的系数在 F 中的下列两个关系成立:

$$x_1+x_2=0,\qquad x_3+x_4=0.$$

可以验证,在方程根的所有 24 个可能置换中,下面 8 个置换

$$E=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1&x_2&x_3&x_4\end{pmatrix},\quad E_1=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_2&x_1&x_3&x_4\end{pmatrix},$$

$$E_2=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1&x_2&x_4&x_3\end{pmatrix},\quad E_3=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_2&x_1&x_4&x_3\end{pmatrix},$$

$$E_4=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_3&x_4&x_1&x_2\end{pmatrix},\quad E_5=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_4&x_3&x_1&x_2\end{pmatrix},$$

$$E_6=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_3&x_4&x_2&x_1\end{pmatrix},\quad E_7=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_4&x_3&x_2&x_1\end{pmatrix},$$

都能使上述两个关系在 F 中保持成立,并且这 8 个置换是 24 个置换中,使根之间在域 F 中的全部代数关系都保持不变的仅有的置换.这 8 个置换就是方程在域 F 中的群,即伽罗瓦群.

需要指出,保持根的代数关系不变,就意味着在此关系中根的地位是对称的.因此,伽罗瓦群刻画了方程的根的对称性.伽罗瓦于是指出,方程的群(即伽罗瓦群)与它是否根式可解存在着本质联系,对方程的群的认识,是解决全部根式可解问题的关键.伽罗瓦证明,当且仅当方程的群满足一定的条件(即方程的群是可解群)时,方程才是根式可解的,也就是说他找到了方程根式可解的充分必要条件.

这里不打算详述伽罗瓦理论的细节,不过我们对于伽罗瓦解决方程根式可解这个难题的思路已经有了一个大致的了解.在伽罗瓦之前,拉格朗日已经讨论过方程根的置换并意识到置换理论是“整个问题的真正哲学”,但他却未能继续前进.只是伽罗瓦通过引进全新的群的概念,才明确指出了其间的实质联系,从而解决了包括欧拉,拉格朗日等许多大数学家都感到棘手的问题.

伽罗瓦攻克的难题虽然是三百年前的老问题,但他的思想却大大超出了他的时代.像阿贝尔一样,伽罗瓦的工作在他生前完全被忽视了,而且和阿贝尔相比,伽罗瓦的身世更为悲惨.伽罗瓦出生在巴黎附近一个小镇的镇长家庭,家境本很优裕,但他生逢法国大革命的动荡时代.在伽罗瓦 18 岁那年,父亲因与天主教保守势力冲突而自杀.从此各种不幸接踵而至.在父亲去世一个月后,伽罗瓦报考他向往已久的巴黎综合工科大学又遭失败,原因可能是他在回答主考官提出的一个特殊问题时,作了不合时宜的回答.后来伽罗瓦考进了巴黎高等师范学校,但第二年因参加反对波旁王朝的“七月革命”而被校方开除,以后又因参加政治活动被捕入狱.1832 年 5 月的一天,伽罗瓦在他的政敌利用爱情纠葛而挑起的一场决斗中身亡,死时不到 21 岁.


图 8.2 伽罗瓦

伽罗瓦的数学研究,就是在这种激烈的动荡和遭受种种打击的情况下利用极为有限的时间进行的.伽罗瓦生前曾三次向法国科学院递交他关于代数方程的论文.第一次论文被柯西丢失,第二次因负责审理的科学院秘书傅里叶病逝而下落不明,第三次则被泊松认为“不可理解”而打入冷宫.在决斗前夜,伽罗瓦通宵达旦整理自己的数学手稿,并在遗书中坚信“最终会有人发现,将这堆东西解释清楚对他们是有益的”.他去世以后十四年(1846),法国数学家刘维尔在其主编的《数学杂志》上首次发表了伽罗瓦的两篇遗作,伽罗瓦工作的意义才逐渐为人认识.伽罗瓦的工作可以看成是近世代数的发端.这不只是因为它解决了方程根式可解这样一个难题,更重要的是群的概念的引进导致了代数学在对象、内容和方法上的深刻变革.19 世纪后半叶,数学家们又认识到,“群”可以是一个更加普遍的概念,而不必仅限于置换群.凯莱(A.Cayley)在 1849—1854 年间指出矩阵在乘法下、四元数在加法下(见 8.2)都构成群.人们还发现高斯在数论中研究过的具有同一判别式的二次型类 $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$(a,b,c 为整数,x,y 取整数值,

$D = b^2 - ac$ 取固定值) 对于型的合成运算也构成群. 1868—1869 年间,若尔当(C. Jordan) 在物理学家布拉维斯(A. Bravais) 关于运动群的理论的启发下开展了无限群(即有无限多个元素的群) 的系统研究. 若尔当的工作又影响克莱因(F. Klein) 关于几何分类中的无限变换群的研究(参见 9.5). 1874—1883 年间,挪威数学家李(S. Lie,1842—1899) 又研究了无限连续变换群(李群). 到 19 世纪 80 年代,关于各种不同类型的群的研究使数学家们有了足够的积累来形成抽象群的概念. 经过抽象定义的群,可以理解为一类对象的集合,这些对象之间存在着类似于加法或乘法那样的二元运算关系,这种运算(不妨称它为乘法,用 · 表示) 满足如下的性质:

1. 封闭性. 集合中任意两个元素的乘积仍属于该集合;
2. 结合性. 对于集合中任意三个元素 a, b, c,满足结合律
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$
3. 存在单位元 I,使对该集合中任意元素 a,有 $I \cdot a = a \cdot I = a$;
4. 对该集合中任意元素 a,存在唯一的逆元素 a^{-1},使得
$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = I.$$

这种定义,在 19 世纪末已得到公认. 在这样定义的群中,集合元素本身的具体内容无关紧要,关键是联系这些元素的运算关系. 这样建立起来的一般群论是描写其他各种数学和物理现象的对称性质的普遍工具. 事实上,在 19 世纪末,群论已被应用于晶体结构的研究,在现代物理中,群论更成为研究基本粒子、量子力学的有力武器.

代数学由于群的概念的引进和发展而获得了新生. 它不再仅仅是研究代数方程,而更多地是研究各种抽象的"对象" 的运算关系,19 世纪中叶以后,这种抽象的"对象" 层出不穷,从而为 20 世纪代数结构观念的产生奠定了基础.

8.2 从四元数到超复数

四元数的发现是继伽罗瓦提出群的概念后 19 世纪代数学最重大的事件. 四元数是推广平面复数系结构的产物. 前面曾谈到,在 18 世纪

末和19世纪初,韦塞尔、阿尔冈和高斯分别给出了复数 $a+bi(a,b$ 为实数) 的几何表示,这样复数才有了合法的地位.在稍微熟悉了复数的几何表示之后,数学家们认识到复数能用来表示和研究平面上的向量.我们知道,向量的概念在物理学上十分重要,力、速度或加速度这些有大小和方向的量都是向量,而人们很早就已知道向量的合成服从平行四边形法则.数学家们发现两个复数相加的结果正好对应于用平行四边形法则相加的向量的和.用复数来表示向量及其运算的一个很大优点,就是人们不一定要几何地作出这些运算,但能够代数地研究它们,就像是曲线的方程能用来表示曲线和研究曲线而带给人们便利一样.但是数学家不久就发现,复数的利用是受到限制的.例如,当几个力作用于一个物体时,这些力不一定在一个平面上.为了能从代数上处理这些力,就需要复数的一个三维类似物.然而,虽然我们能很容易地用三维笛卡儿坐标 (x,y,z) 表示从原点到该点的向量,但数学家很快认识到,不存在三元数组的运算来表示向量的运算.

对复数的类似推广作出重要贡献的是爱尔兰数学家哈密顿(W. R. Hamilton,1805—1865).在英国数学家中他的声誉仅次于牛顿,而且和牛顿一样,他作为一个物理学家甚至比作为一个数学家在当时更有名.

哈密顿推广复数的工作是从他把复数处理成实数的有序数偶开始的.哈密顿在1837年发表的一篇文章中指出,复数 $a+bi$ 不是 $2+3$ 意义上的一个真正的和,加号的使用是历史的偶然,而 bi 是不能加到 a 上去的.复数 $a+bi$ 不过是有序实数偶 (a,b).哈密顿给这种数偶定义了加法和乘法,如:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc),$$

并且证明这两种运算具有封闭性、交换性和结合性.哈密顿下一步试图要做的事就是推广有序实数偶的思想.他考虑会不会有一种三元数组作为复数的三维类似物,它具有实数和复数的基本性质.但是经过长期的努力之后,哈密顿发现他所要找的新数应包含四个分量,而且必须放弃乘法的交换性.他把这种新数命名为四元数.

哈密顿的四元数形如

$$a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k},$$

其中 a,b,c,d 为实数,$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 满足

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=-1,$$

$$\mathbf{ij}=-\mathbf{ji}=\mathbf{k},\ \mathbf{jk}=-\mathbf{kj}=\mathbf{i},\ \mathbf{ki}=-\mathbf{ik}=\mathbf{j},$$

两个四元数相乘可以根据上面的规则仿照复数乘法那样去做,例如,设

$$p=1+2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k},q=4+3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k},$$

则

$$\begin{aligned}pq&=(1+2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k})(4+3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})\\&=-12+6\mathbf{i}+24\mathbf{j}+12\mathbf{k},\\qp&=(4+3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})(1+2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k})\\&=-12+16\mathbf{i}+4\mathbf{j}+22\mathbf{k}.\end{aligned}$$

可见 $pq\neq qp$,但哈密顿证明了四元数乘法具有"结合性",这是第一次使用这个术语.

四元数也是历史上第一次构造的不满足乘法交换律的数系. 它本身虽无广泛的应用,但它对于代数学的发展来说是革命性的,从此数学家们可以更加自由地构造新的数系,通过减弱、放弃或替换普通代数中的不同定律和公理(如交换律、结合律等),就为众多代数系的研究开辟了道路.

关于四元数的发现,哈密顿本人后来曾作过这样一个生动的描述:

"明天是四元数的第 15 个生日. 1843 年 10 月 16 日,当我和哈密顿太太步行去都柏林途中来到勃洛翰桥的时候,它们就来到了人世间,或者说出生了,发育成熟了. 这就是说,此时此地我感到思想的电路接通了,而从中落下的火花就是 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 之间的基本方程,恰恰就是我后来使用它们的那个样子. 我当场抽出笔记本(它还保存着),将这些思想记录下来. 与此同时,我感到也许值得花上未来的至少 10 年或许 15 年的劳动. 但当时已完全可以说,我感到一个问题就在那一刻已经解决了,智力该缓口气了,它已经纠缠着我至少 15 年了."

据说,他当时还取出随身带的一把小刀,将四元数所满足的规律刻在了那座桥的石栏上.

在哈密顿之后,各种新的超复数像雨后春笋般涌现出来.事实上,就在哈密顿建立四元数时,一位德国数学家格拉斯曼(H.G.Grassmann)也在对复数作出推广.与哈密顿相比,格拉斯曼的推广更为大胆.1844年,也就是哈密顿宣布发现四元数的第2年,格拉斯曼出版了他的《线性扩张论》.但由于他把神秘的教义和本来就抽象难懂的数学内容揉合在一起,再加上语言晦涩,所以这本书影响很小.直到1862年,格拉斯曼对他的书作了修订、简化,他的理论的独创性才逐渐为人所知.

格拉斯曼实际上涉及的是 n 维向量空间.他所说的“扩张的量”就是一种有 n 个分量的超复数.例如当 $n = 3$ 时,考虑两个超复数

$$\alpha = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,$$
$$\beta = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3.$$

其中,a_i 和 b_i 是实数,e_i 是基元素,格拉斯曼定义它们的加减法为

$$\alpha \pm \beta = (a_1 \pm b_1)e_1 + (a_2 \pm b_2)e_1 + (a_3 \pm b_3)e_3,$$

而对于乘法则定义了两种,一种称为内积,另一种称为外积.对于内积,他假设

$$e_i \mid e_i = 1,\ e_i \mid e_j = 0,\ i \neq j,$$

所以 $\alpha \mid \beta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$,并且有 $\alpha \mid \beta = \beta \mid \alpha$.对于外积,他假设

$$[e_ie_i] = 0,\ [e_ie_j] = -[e_je_i],\ i \neq j,$$

所以

$$[\alpha\beta] = (a_2b_3 - a_3b_2)[e_2e_3] + (a_3b_1 - a_1b_3)[e_3e_1] + (a_1b_2 - a_2b_1)[e_1e_2],$$

显然 $[\alpha\beta] \neq [\beta\alpha]$.

格拉斯曼还讨论了超复数之间的混合积.在1855年的一篇文章中,格拉斯曼更对超复数给出了16种不同类型的乘积.他对这些乘积作了几何解释,并给出了它们在力学、磁学和结晶学等方面的应用.

我们在前面曾提到,将复数推广到超复数的一个重要动力是来自物理方面的需要.格拉斯曼的超复数在一定程度上满足了这种需要,但他的工作在相当长的一段时间里被人忽视了.四元数倒是立刻吸引了

人们的注意力,但它却不适合物理学家的需要.将四元数改造成物理学家所需要的工具的第一步,是由英国数学物理学家麦克斯韦迈出的.他区分了四元数的数量部分和向量部分.在一个四元数

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

中,a 称为数量部分,$b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ 称为向量部分.他说,要规定一个向量需要三个量(分量),这三个量能解释成沿三个坐标轴的长度.麦克斯韦在此基础上创造了大量的向量分析,不过他还是没有把向量与四元数完全分开,仍然经常用四元数作为基本的数学实体.

独立于四元数的三维向量代数和向量分析,是在 19 世纪 80 年代初由美国数学物理学家吉布斯(J. W. Gibbs)和英国数学物理学家亥维赛(O. Heaviside)创立的.他们两人对这个课题的发展结果,除了记法外本质上是一致的.根据吉布斯和亥维赛所提出的思想,一个向量只是四元数的向量部分,但独立于任何四元数.因此,向量 $\boldsymbol{v}$ 是

$$\boldsymbol{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

其中 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 是分别沿 x,y,z 轴的单位向量,a,b,c 是三个实数,称为向量的分量.两个向量的和仍是一个向量,它的分量就是相加的两个向量相应分量的和.

向量的乘法有两种,一种是数量乘法,用“·”表示,也称为“点乘”,在这种情形中,$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 满足

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1,$$
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0.$$

因此,把 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}' = a'\mathbf{i} + b'\mathbf{j} + c'\mathbf{k}$ 点乘就得到

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' = aa' + bb' + cc'.$$

这个乘积不再是向量而是一个数量,称为数量积.所以,两个向量的数量乘法与两个实数或复数或四元数的乘法都不同,它不满足封闭性.

向量的另一种乘法是向量积,用“×”表示,也称为“叉乘”,在这种情形中,$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 满足

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0,$$
$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}, \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i},$$
$$\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}, \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

因此,把 v 和v' 叉乘就得到

$$v \times v' = (bc' - b'c)\mathbf{i} + (ca' - ac')\mathbf{j} + (ab' - ba')\mathbf{k}.$$

它也可写成行列式的形式

$$v \times v' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}.$$

两个向量的向量积是一个向量,它的方向垂直于 v 和v' 所决定的平面,且指向 v 通过较小的角度转到v'时右手螺旋所指的方向.向量积不具有交换性.

矩阵是不满足乘法交换律的又一类代数对象的例子.矩阵作为线性方程组系数的排列形式可以追溯到古代(见3.1.3).在18世纪,这种排列形式在线性方程组和行列式计算中应用日广,但矩阵作为独立的数学对象则是19世纪中叶以后的事情,高斯的二次型研究提供了重要的刺激.高斯在讨论二次型 $F = Ax^2 + 2Bxy + cy^2$ 在线性变换下的变化时,实质上已涉及了矩阵的乘法.从1850年代开始,凯莱和西尔维斯特发展了更一般的代数形式变换理论,矩阵是他们手中极为有效的工具,矩阵代数随之确立(矩阵[matrix] 这一术语是西尔维斯特在1850年首次引进的).

我们看到,不论是哈密顿的四元数,格拉斯曼的超复数,还是向量和矩阵,这些特定的代数都不能完全保持我们通常印象中的数的运算的基本性质.那么类似这样的代数能够有多大的自由度呢?后来的数学家也对这个问题进行了讨论.例如,魏尔斯特拉斯在1861年证明:有有限个基元素的实系数或复系数线性结合代数,如果要服从乘积定律和乘法交换律,就只有实数代数和复数代数.这就从数学上严格证明了为什么哈密顿寻求"三维复数"的努力是徒劳的.假如他知道这样一些定理的话,他就会节省下许多宝贵的时间.

8.3　布尔代数

19世纪中后叶,代数学还开拓了另一个完全不同的领域.我们知

道,早在17世纪,莱布尼茨就想要发明一种通用的语言,借助它的符号和专门语法来指导推理.他认为逻辑语言应该用一些表意的符号,每一个符号代表一个简单的概念,通过各种符号的组合表达复杂的思想.他也认真地考虑过建立一种推理的代数,试图通过演算完成一切正确的推理过程.在他真正开始的逻辑代数工作中,莱布尼茨已经直接或间接地有了我们现在所说的逻辑加法、乘法、等同、否定和空集这样一些概念,他还注意到需要研究一些抽象关系,如包含、等价关系等,并认识到一些关系的对称性和传递性.但是,莱布尼茨并没有完成这项工作,而他已做过的一些工作的细节直到20世纪初才出版,因此对后来逻辑代数的产生和发展很少有直接的影响.

莱布尼茨提出的逻辑数学化的思想在两个世纪后才获得实质性进展.英国数学家布尔(G. Boole,1815—1864)的逻辑代数即现今所称的"布尔代数"基本上完成了逻辑的演算工作.

布尔的父亲是一位鞋匠.由于家境不富裕,布尔小学毕业后就担起了养家糊口的重任.他先是在几所乡村小学代课,而后又自己开办了一所小学.但是通过顽强的自学,他不但掌握了拉丁语、希腊语、意大利语、法语和德语,还搞懂了拉格朗日和拉普拉斯的著作.1844年,他发表了一篇题名为"分析中的一般方法"的文章,为他在数学上确立了最初的声誉.该文还获得了英国皇家学会颁发的金质奖章.布尔的逻辑代数思想集中在他的两本书中,一本是1847年发表的《逻辑的数学分析》,另一本是1854年出版的《思维规律研究》.除数理逻辑外,布尔还对不变式理论、微分方程和差分方程等作出过重要贡献.虽然布尔连中学都没上过,更谈不上有大学文凭,但由于在数学上的杰出贡献,他还是被爱尔兰科克女王学院任命为数学教授.

布尔很早就有了将数学应用于逻辑的想法,但他真正开始这方面的工作,还是在他得知数学家德摩根和哲学家哈密顿(与数学家哈密顿不是同一个人)关于所谓"谓词量化学说"的优先权争论之后.我们知道,传统的亚里士多德逻辑所讨论的命题是一种具有"主-谓"形式的命题,亚里士多德的三段论也是建立在对这种命题进行推理的基础上

的.它们有四种基本的形式:

1.全称肯定命题:所有 X 是 Y;

2.全称否定命题:所有 X 不是 Y;

3.特称肯定命题:有些 X 是 Y;

4.特称否定命题:有些 X 不是 Y.

这四种命题中只有主词是被量化的.19 世纪上半叶,一些逻辑学家在对逻辑形式进行新的分析后指出,人们在实际进行判断时,不但要考虑主词的量,而且也要考虑谓词的量,将谓词量化的努力使人们想到可以用等式来处理命题,从而为布尔的逻辑代数作了技术上的准备.

布尔的逻辑代数首先是作为一种类演算建立起来的,后来,布尔又对它作了命题演算和概率演算的解释.类就是我们现在所说的集合,用 x、y、z 等表示,符号 X, Y, Z 等则代表个体元素.1 表示全类或称论域(这个概念属于德摩根),0 代表空类.两个类 x 和 y 相加用 $x+y$ 表示,这类似于我们现在所说的两个集合的并.但与现在的意义不同的是,布尔只考虑了 x 和 y 之间没有公共元素的情况,后来的逻辑学家则把它推广为两个可以相交的类之间的和.两个类 x 和 y 相乘用 xy 表示,它相当于两个集合的交.$1-x$ 代表那些所有不在 x 中的个体元素组成的类,更一般地,布尔还考虑了两个类相减 $x-y$.而 x 包含 y 则可写成 $y=xy$.

有了这些记号,传统逻辑中的四种基本命题就可以用符号清楚地表示出来,例如:

所有 X 是 Y	……	$x(1-y)=0$
所有 X 不是 Y	……	$xy=0$
有些 X 是 Y	……	$xy\neq 0$
有些 X 不是 Y	……	$x(1-y)\neq 0$

这四个命题中的每一个也可以用其他各种代数等价的方式来表示,但上述表示方式是最简单的.

在布尔的系统中,以下原理都是成立的,尽管其中的一些他是明确假定的,而另一些则是隐含地假定的:

1. $xy=yx$
2. $x+y=y+x$

3. $x(y+z)=xy+xz$

4. $x(y-z)=xy-xz$

5. 如果 $x=y$,则 $xz=yz$

6. 如果 $x=y$,则 $x+z=y+z$

7. 如果 $x=y$,则 $x-z=y-z$

8. $x(1-x)=0$

其中前 7 个在形式上类似于普通代数的规则,只有第 8 个是逻辑代数所特有的,它又可表示成 $x^2=x$.需要注意的是,我们并不能由此必然得出 $x=0$ 或 $x=1$,因为这里涉及的不是普通的数值运算,我们也没有假定每一个类与空类或全类有相同的外延.因此,布尔的系统并不像有些书中所说的那样是二值代数.不过再加入一个新的原理:

9. 或者 $x=0$,或者 $x=1$

就可以将布尔的系统转化为二值代数.

在布尔之后,一些逻辑学家和数学家又对他的逻辑演算作了改进和发展.其中比较重要的是杰文斯(W.S.Jevons)、皮尔斯(C.S.Peirce)和施罗德(F.W.K.E.Schröder)的工作.杰文斯对逻辑代数所作的最大改进,就是去掉了布尔要求的相加的类必须是不相交的这一限制,从而使得 $x+x=x$ 成为一个合法的逻辑规律.皮尔斯的重要贡献是区分了命题和命题函数.皮尔斯还引入了两个变量的命题函数.

由布尔开创的逻辑代数,在施罗德的洋洋三大卷《逻辑代数讲义》(1890—1905)中发展到了顶峰.而在 1879 年,德国数学家弗雷格(G.Frege)则开创了数理逻辑研究的另一种传统——数学基础传统.他的目标不是把数学应用于逻辑以实现逻辑规律和逻辑推理的数学化,而是利用精密化的逻辑为数学建立一个可靠的基础.以后,通过佩亚诺(G.Peano)、怀特黑德和罗素等人的工作,就将数理逻辑研究中的逻辑代数传统和数学基础传统汇合在一起.

8.4 代数数论

在 19 世纪以前,数论只是一系列孤立的结果,但自从高斯

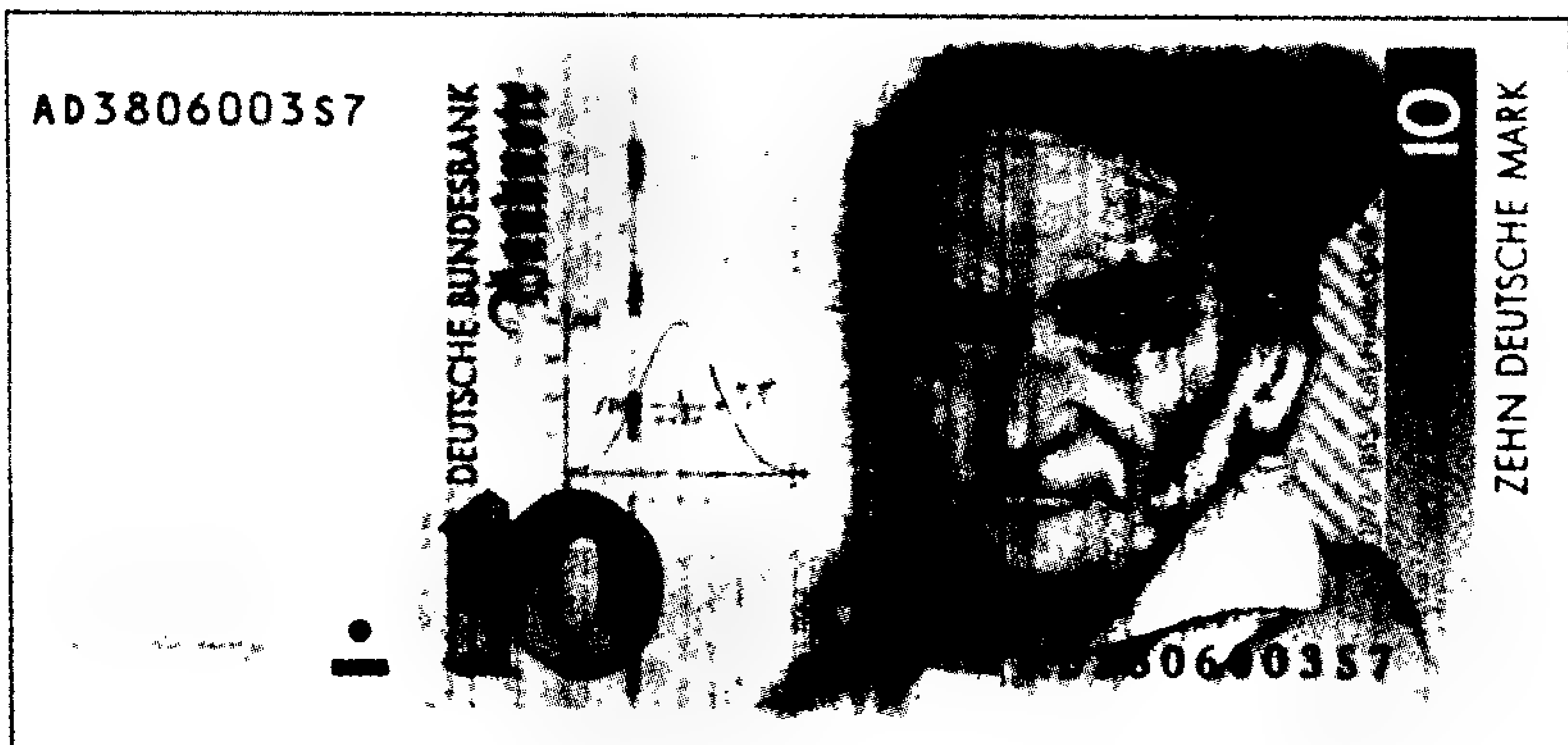


图 8.3　德国马克上的高斯

(C. F. Gauss, 1777—1855) 在 1801 年发表了他的《算术研究》后，数论作为现代数学的一个重要分支得到了系统的发展. 这一年他只有 24 岁.

高斯出生在德国不伦瑞克一个世代都是劳动者的家庭. 他的父亲当过花匠、瓦工和运河看管人，人虽正直但在家里却很专断. 如果按照他那固执的父亲的意见，高斯很可能避免不了同样成为一名花匠或瓦工的命运. 幸运的是，高斯有一位开通的母亲和一位聪明能干并具有远见的舅舅. 他的母亲虽没有受过教育，但她却寄希望于儿子，并且一生都以儿子的成就作为自己生活的精神支柱. 而他的舅舅最先发现了高斯异乎寻常的才智，并有意识地对他进行了早期培养.

高斯是历史上并不多见的以"神童"著称的一位数学家. 据说，还在他 3 岁时，他就发现了父亲帐薄上的一个计算错误. 另一则广为流传的故事讲的是高斯 10 岁时，有一天，老师为了让班里的孩子们有事干，出了一道题：从 1 一直加到 100. 然而就在老师刚刚把这道题写在黑板上，小高斯就给出了正确的答案：5050. 后来，高斯的天才引起了不伦瑞克公爵的注意. 这位有权势的人物资助高斯完成了中学和大学的学业. 正是出于对公爵的感激，高斯把他的《算术研究》献给不伦瑞克公爵. 关于数论，高斯曾说过一句名言："数学是科学的女王，而数论是数学的女王." 他还说过："天文学与纯数学，是我心智的罗盘永远指向的磁

极.”高斯在纯粹数学和应用数学的许多领域都作出过重要贡献.

《算术研究》中有三个主要思想:同余理论,复整数理论和型的理论.其中复整数理论正是代数数论的开端,而这个理论又是从高斯对同余理论的研究中派生出来的.如果 a,b,m 是整数,并且 $a-b$ 能被 m 整除,那么这时就说 a 和 b 关于模 m 是同余的,高斯将这一事实记为 $a\equiv b(\mathrm{mod}m)$,它也称为同余式.对于模相同的同余式,可以像等式那样来处理.例如,从 $a\equiv b(\mathrm{mod}m)$ 和 $a'\equiv b'(\mathrm{mod}m)$ 可以得出:

$$a\pm a'\equiv b\pm b'(\mathrm{mod}m).$$

当然,我们也可以求包含未知量的同余式的解.例如,求 x 的值使它满足 $2x\equiv 25(\mathrm{mod}\ 12)$.这个同余式方程没有解,因为 $2x-25$ 是奇数,12 是偶数,所以 $2x-25$ 不可能被 12 整除.

高斯特别研究了 $x^2\equiv a(\mathrm{mod}p)$(其中 p 是素数,a 不是 p 的倍数)这种同余式方程.如果它有解,就称 a 是 p 的二次剩余,否则称 a 是 p 的二次非剩余.关于二次剩余和二次非剩余,有一个著名的定理与之相联系,高斯称它为二次互反律:

设 p 和 q 是两个相异的奇素数,如果乘积 $\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right)$ 是偶数,则当且仅当 $x^2\equiv p(\mathrm{mod}\ q)$ 有解时,$x^2\equiv q(\mathrm{mod}\ p)$ 有解;如果上述乘积是奇数,则当且仅当 $x^2\equiv p(\mathrm{mod}\ q)$ 无解时,$x^2\equiv q(\mathrm{mod}\ p)$ 有解.利用勒让德后来引入的一个记号 (a/p):

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1, & \text{如果 } x^2\equiv a(\mathrm{mod}\ p)\text{ 有解}\\ -1, & \text{如果 } x^2\equiv a(\mathrm{mod}\ p)\text{ 无解}\end{cases}$$

还可以把二次互反律表达成如下优美的形式:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

二次互反律是欧拉最先发现的,但他没有给出证明.勒让德给出的一个证明则是不完全的.第一个完全的证明是由高斯在 1796 年给出的,后来他在《算术研究》中又给出了另一个证明.高斯非常欣赏这个定律,把它誉为“算术中的宝石”,而且在他的一生中至少给出过二次互反律 8 个不同的证明.

高斯在证明了二次互反律之后，试图将它推广到三次和四次互反律，但他发现为使三次和四次剩余的理论简单、优美，就必须超出通常的整数范围，引进复整数，即形如 $a+bi$，其中 a,b 是整数的复数．对于复整数可以像处理普通整数那样讨论它的数论性质．例如，在普通整数论中，可逆元素是 1 和 -1，复整数论中的可逆元素则是 ± 1 和 $\pm i$．一个复整数如果不能分解为除可逆元素及其本身以外的复整数的乘积，就称为一个复素数．因此，在复整数论中，由于 $5=(1+2i)(1-2i)$，所以它不再是一个素数，但 3 仍是一个素数．另外，我们知道，在普通素数论中，有一个重要的定理称为算术基本定理，它说每一个整数都可以唯一地（如果不考虑次序的话）分解为素因子的乘积．高斯发现，如果不把四个可逆元素作为不同的因数，那么这个定理对于复整数也是成立的．这样，高斯的复整数理论就开辟了数论的一个新天地．

在高斯之后对代数数论作出重要贡献的数学家库默尔（E. E. Kummer，1810—1893）也是一位德国人，他的工作与证明费马大定理有关．我们知道，费马大定理断言，如果 n 是任一大于 2 的整数，则方程 $x^n+y^n=z^n$ 不存在满足 $xyz\neq 0$ 的整数解．

库默尔的做法是考虑 $x^p+y^p=z^p$，p 是奇素数的情形，因为容易看出费马大定理可以归结为 $n=4$ 和 $n=p$（p 为奇素数）两种情形，而 $n=4$ 的情形已经被费马本人解决了．库默尔把 $x^p+y^p=z^p$ 写成 $x^p=z^p-y^p$，并将等式右边分解成一次因式的乘积：

$$(z-y)(z-\zeta y)\cdots(z-\zeta^{p-1}y),$$

其中 ζ 是一个 p 次本原单位根，也就是方程

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1=0$$

的一个根．这就引导他将高斯的复整数理论推广到形如

$$f(\zeta)=a_0+a_1\zeta+\cdots+a_{p-1}\zeta^{p-1}$$

的数，其中每个 a_i 都是普通整数．库默尔起初以为对于这类代数数，唯一分解定理仍成立，并在这一前提下给出了费马大定理的证明．但是随后不久就被狄利克雷（P. G. L. Dirichlet）指出这一假定是错误的．因为对于一般的代数整数，唯一分解定理并不成立．例如考虑形如 $a+b\sqrt{-5}$ 的代数整数，这里 a,b 是整数．我们有 $6=2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$，

容易证明这四个因子都是素整数,可见唯一分解定理不成立.为了重建唯一分解定理,使得普通数论的一些结果在推广到代数数论时仍能成立,库默尔在1844—1847年间创立了理想数理论.如针对上面的例子,在引入理想数

$$\alpha = \sqrt{2},$$
$$\beta_1 = (1+\sqrt{-5})/\sqrt{2},$$
$$\beta_2 = (1-\sqrt{-5})/\sqrt{2}$$

后,6就可以唯一地表示成四个因子的乘积:$6 = \alpha^2\beta_1\beta_2$.后来,德国数学家戴德金(R.Dedekind,1831—1916)又把库默尔的工作系统化并推广到一般的代数数域,从而创立了现代代数数的理论.

如果一个数 r 是整系数代数方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

的根,但不是次数低于 n 的这种方程的根,就称它是一个 n 次代数数.假如 $a_0 = 1$,则称 r 是一个 n 次代数整数.戴德金引入的一个重要概念是数域的概念.一个数域是这样一些实数或复数组成的集合 F,它满足如下条件:如果 $\alpha,\beta \in F$,则 $\alpha+\beta,\alpha-\beta,\alpha\beta,\alpha/\beta(\beta\neq 0)\in F$.可以证明,全体代数数的集合形成一个域.但是作为代数数论研究对象的代数数域则是指这个域的一个子域,它可以看成是由有理数域添加进有限个代数数扩充而成.例如,包含复整数的代数数域就是由有理数域 Q 添加上 i 得到的,记作 $Q(\mathrm{i})$.而包含形如 $f(\zeta)$ 的数的代数数域则是由有理数域 Q 添加上 ζ 形成的,记作 $Q(\zeta)$.一般地,如果 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r$ 是代数数,则由它们添加进有理数域所形成的代数数域可记为 $Q(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r)$.在将代数数的概念一般化后,戴德金就用一种不同于库默尔的做法来重建代数数域中的唯一因子分解定理.他引进了代数数类来代替理想数,为了纪念库默尔的理想数,他把它们称为理想.

这里,我们不拟讨论戴德金理想论的细节.然而我们从以上的介绍已经可以获得这样一种观念:数学上一个看似平常的特殊问题,有时甚至会对数学本身的发展产生难以估量的影响.费马大定理就是这方面的一个极好的例子.

几何学的变革 9

9.1 欧几里得平行公设

直到 18 世纪末，几何领域仍然是欧几里得一统天下. 解析几何改变了几何研究的方法，但没有从实质上改变欧氏几何本身的内容. 解析方法的运用虽然在相当长的时间内冲淡了人们对综合几何的兴趣，但欧几里得几何作为数学严格性的典范始终保持着神圣的地位. 许多数学家都相信欧几里得几何是绝对真理，例如巴罗就曾列举 8 点理由来肯定欧氏几何，说它概念清晰；定义明确；公理直观可靠而且普遍成立；公设清楚可信且易于想象；公理数目少；引出量的方式易于接受；证明顺序自然；避免未知事物，他因而极力主张将数学包括微积分都建立在几何基础之上. 17、18 世纪的哲学家从霍布斯(T. Hobbes)、洛克(J. Locke) 到康德(I. Kant)，也都从不同的出发点认为欧氏几何是明白的和必然的. 难怪笛卡儿在发明了解析几何以后仍坚持对每一个几何作图给出综合证明，牛顿在首次公开他的微积分发明时也坚持给它披上几何的外衣.

然而，这个近乎科学"圣经" 的欧几里得几何并非无懈可击. 事实上，公元前 3 世纪到 18 世纪末，数学家们虽然一直坚信欧氏几何的完美与正确，但有一件事却始终让他们耿耿于怀，这就是欧几里得第五公设，也称平行公设. 在欧氏几何的所有公设中，唯独这条公设显得比较

特殊.它的叙述不像其他公设那样简洁、明了,当时就有人怀疑它不像是一个公设而更像是一个定理,并产生了从其他公设和定理推出这条公设的想法.欧几里得本人对这条公设似乎也心存犹豫,并竭力推迟它的使用,一直到卷 I 命题 29 才不得不利用它.

因此,从古希腊时代开始,数学家们就一直没有放弃消除对第五公设疑问的努力.他们或者寻求以一个比较容易接受、更加自然的等价公设来代替它,或者试图把它当作一条定理由其他公设、公理推导出来.在众多的替代公设中,今天最常用的是:

"过已知直线外一点能且只能作一条直线与已知直线平行".

一般将这个替代公设归功于苏格兰数学家、物理学家普莱菲尔(J.Playfair,1748—1819),所以有时也叫普莱菲尔公设.但实际上古希腊数学家普洛克鲁斯在公元5世纪就陈述过它.然而问题是,所有这些替代公设并不比原来的第五公设更好接受、更加"自然".

历史上第一个证明第五公设的重大尝试是古希腊天文学家托勒玫(约公元150)作出的,后来普洛克鲁斯指出托勒玫的"证明"无意中假定了过直线外一点只能作一条直线平行于该直线,这就是上面提到的普莱菲尔公设.

如第4章所述,中世纪的阿拉伯数学家奥马·海雅姆和纳西尔·丁等也尝试过第五公设的"证明".

文艺复兴时期对希腊学术兴趣的恢复使欧洲数学家重新关注起第五公设.在17世纪研究过第五公设的数学家有沃利斯等.但每一种"证明"要么隐含了另一个与第五公设等价的假定,要么存在着其他形式的推理错误.而且,这类工作中的大多数对数学思想的进展没有多大现实意义.因此,在18世纪中叶,达朗贝尔曾把平行公设的证明问题称为"几何原理中的家丑".但就在这一时期前后,对第五公设的研究开始出现有意义的进展.在这方面的代表人物是意大利数学家萨凯里(G.Saccheri)、德国数学家克吕格尔(G.S.Klügel)和瑞士数学家兰伯特.

萨凯里最先使用归谬法来证明平行公设.他在一本名叫《欧几里得无懈可击》(1733)的书中,从著名的"萨凯里四边形"出发来证明平行

公设.萨凯里四边形是一个等腰双直角四边形,如图 9.1,其中 $AC = BD$, $\angle A = \angle B$ 且为直角.

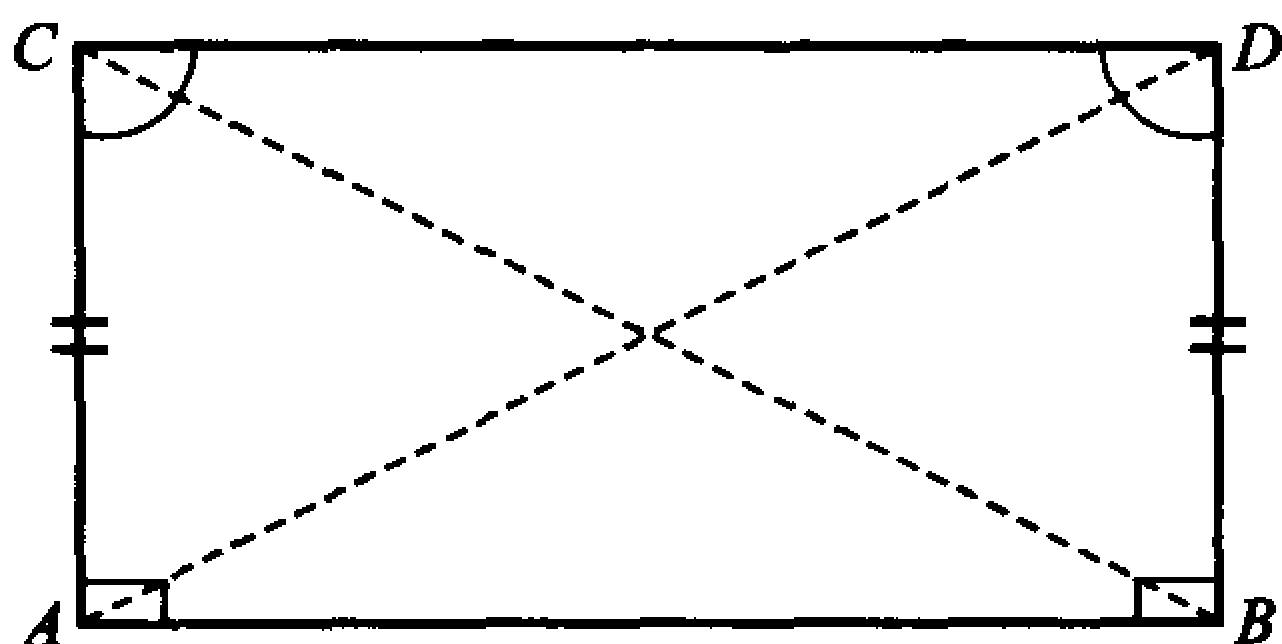


图 9.1

不用平行公设容易证明 $\angle C = \angle D$. 萨凯里指出,顶角具有三种可能性并分别将它们命名为

1. 直角假设:$\angle C$ 和 $\angle D$ 是直角;
2. 钝角假设:$\angle C$ 和 $\angle D$ 是钝角;
3. 锐角假设:$\angle C$ 和 $\angle D$ 是锐角.

可以证明,直角假设与第五公设等价.萨凯里的计划是证明后两个假设可以导致矛盾,根据归谬法就只剩下第一个假设成立,这样就证明了第五公设.

萨凯里在假定直线为无限长的情况下,首先由钝角假设推出了矛盾,然后考虑锐角假设,在这一过程中他获得了一系列新奇有趣的结果,如三角形三内角之和小于两个直角;过给定直线外一给定点,有无穷多条直线不与该给定直线相交,等等.虽然这些结果实际上并不包含任何矛盾,但萨凯里认为它们太不合情理,便以为自己导出了矛盾而判定锐角假设是不真实的.

萨凯里的工作激发了数学家们进一步的思考.1763 年,克吕格尔在其博士论文中首先指出萨凯里的工作实际上并未导出矛盾,只是得到了似乎与经验不符的结论.克吕格尔是第一位对平行公设能否由其他公理加以证明表示怀疑的数学家.他的见解启迪兰伯特对这一问题进行了更加深入的探讨.1766 年,兰伯特写出了《平行线理论》一书.在这本书中,他也像萨凯里那样考虑了一个四边形,不过他是从一个三直

角四边形出发,按照第四个角是直角、钝角还是锐角作出了三个假设.由于钝角假设导致矛盾,所以他很快就放弃了它.与萨凯里不同的是,兰伯特并不认为锐角假设导出的结论是矛盾,而且他认识到一组假设如果不引起矛盾的话,就提供了一种可能的几何.因此,兰伯特最先指出了通过替换平行公设而展开新的无矛盾的几何学的道路.萨凯里、克吕格尔和兰伯特等,都可以看成是非欧几何的先行者.然而,当他们走到了非欧几何的门槛前,却由于各自不同的原因或则却步后退(如萨凯里在证明了一系列非欧几何的定理后却宣布"欧几里得无懈可击"),或则徘徊不前(兰伯特在生前对是否发表自己的结论一直踌躇不定,《平行线理论》一书是他死后由朋友发表的).突破具有两千年根基的欧氏几何传统的束缚,需要更高大的巨人,这样的时机在19世纪初逐渐成熟,并且也像解析几何、微积分的创立一样,这样的人物出现了不止一位.对非欧几何来说,他们是高斯,波约(J. Bolyai,1802—1860)和罗巴切夫斯基(Н. И. Лобачевский,1792—1856).

9.2 非欧几何的诞生

前面讲过,在非欧几何正式建立之前,它的技术性内容已经被大量地推导出来.但最先认识到非欧几何是一种逻辑上相容并且可以描述物质空间、像欧氏几何一样正确的新几何学的是高斯.从高斯的遗稿中可以了解到,他从1799年开始意识到平行公设不能从其他的欧几里得公理推出来,并从1813年起发展了这种平行公设在其中不成立的新几何.他起先称之为"反欧几里得几何",最后改称为"非欧几里得几何",所以"非欧几何"这个名称正是来自高斯.但他除了在给朋友的一些信件中对其非欧几何的思想有所透露外,高斯生前并没有发表过任何关于非欧几何的论著.这主要是因为他感到自己的发现与当时流行的康德空间哲学相抵触,担心世俗的攻击.他曾在给贝塞尔(F. W. Bessel)的一封信中说:如果他公布自己的这些发现,"黄蜂就会围着耳朵飞",并会"引起波哀提亚人的叫嚣".这里所讲的波哀提亚人是古希腊的一个部落,向以愚昧著称,高斯是借此影射那些反对他的人.高斯素有"数

学之王”的美誉,在许多数学领域都有奠基性贡献,但于非欧几何却怯于公开同传统挑战,可见为新思想开辟道路并不是件容易的事情.

当声誉甚隆的高斯决定将自己的发现秘而不宣时,一位尚名不见经传的匈牙利青年波约却急切地希望通过高斯的评价而将自己关于非欧几何的研究公诸于世,波约的父亲 F. 波约是高斯的朋友,也是一位数学家. 1832 年 2 月 14 日, F. 波约将他儿子的一篇题为《绝对空间的科学》的 26 页文章寄给高斯,这篇文章也作为 F. 波约刚刚完成的一本数学著作的附录而发表,其中论述的所谓“绝对几何”就是非欧几何. F. 波约请高斯对他儿子的论文发表意见,然而高斯回信说:“称赞他(即 J. 波约)就等于称赞我自己. 整篇文章的内容,您儿子所采取的思路和获得的结果,与我在 30 至 35 年前的思考不谋而合.”J. 波约对高斯的答复深感失望,认为高斯想剽窃自己的成果. 1840 年俄国数学家罗巴切夫斯基关于非欧几何的德文著作出版后,更使 J. 波约灰心丧气,从此便不再发表数学论文,而他的父亲倒很开通,安慰他说:“春天的紫罗兰在各处盛开.”



图 9.2　波约



图 9.3　罗巴切夫斯基

在非欧几何的三位发明人中,只有罗巴切夫斯基最早、最系统地发表了自己的研究成果,并且也是最坚定地宣传和捍卫自己的新思想的一位. 他先是于 1826 年在喀山大学发表了《简要论述平行线定理的

一个严格证明》的演讲，报告了自己关于非欧几何的发现，而后又在1829年发表了题为《论几何原理》的论文，这是历史上第一篇公开发表的非欧几何文献，但由于是用俄文刊登在《喀山通讯》上而未引起数学界的注意. 罗巴切夫斯基后来为发展、阐释这种新几何学而付出了毕生心血. 他生前发表了许多论著，其中1835—1838年间的系列论文《具有完备的平行线理论的新几何学原理》较好地表述了他的思想，而1840年用德文出版的《平行理论的几何研究》则引起高斯的关注，这使他在1842年成为德国哥廷根科学协会会员.

罗巴切夫斯基非欧几何的基本思想与高斯、波约是一致的，即用与欧几里得第五公设相反的断言：通过直线外一点，可以引不止一条而至少是两条直线平行于已知直线，作为替代公设，由此出发进行逻辑推导而得出一连串新几何学的定理. 罗巴切夫斯基明确指出，这些定理并不包含矛盾，因而它的总体就形成了一个逻辑上可能的、无矛盾的理论，这个理论就是一种新的几何学——非欧几里得几何学.

设给定了直线 a 和直线外一点 A，从 A 引 a 的垂直线 AB. 按照罗巴切夫斯基的基本假设，至少存在两条直线 b, b'，通过点 A 且不与直线 a 相交(如图 9.4，注意图形在这里只起辅助理解的作用，罗氏论证的并不是我们普通平面上所作的图). 罗巴切夫斯基考虑所有过 A 不与 a 相交的直线的极限情形，指出这样的极限直线有两条(c 与 c')，并证明了它们也不与 a 相交. 因此，c 与 c' 便构成了所有不与 a 相交的直线的边界，在这两条边界直线所成夹角 α 内的所有直线都不与 a 相交(如图 9.5). 罗巴切

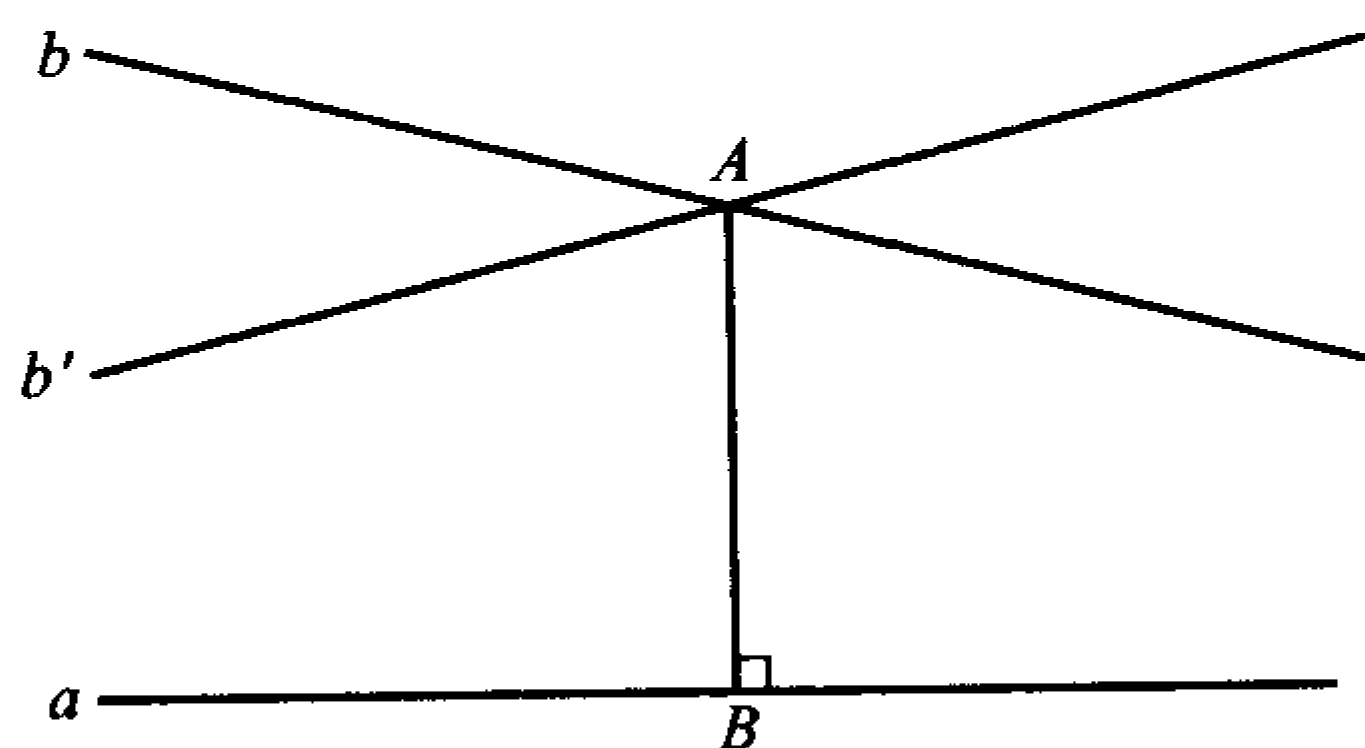


图 9.4

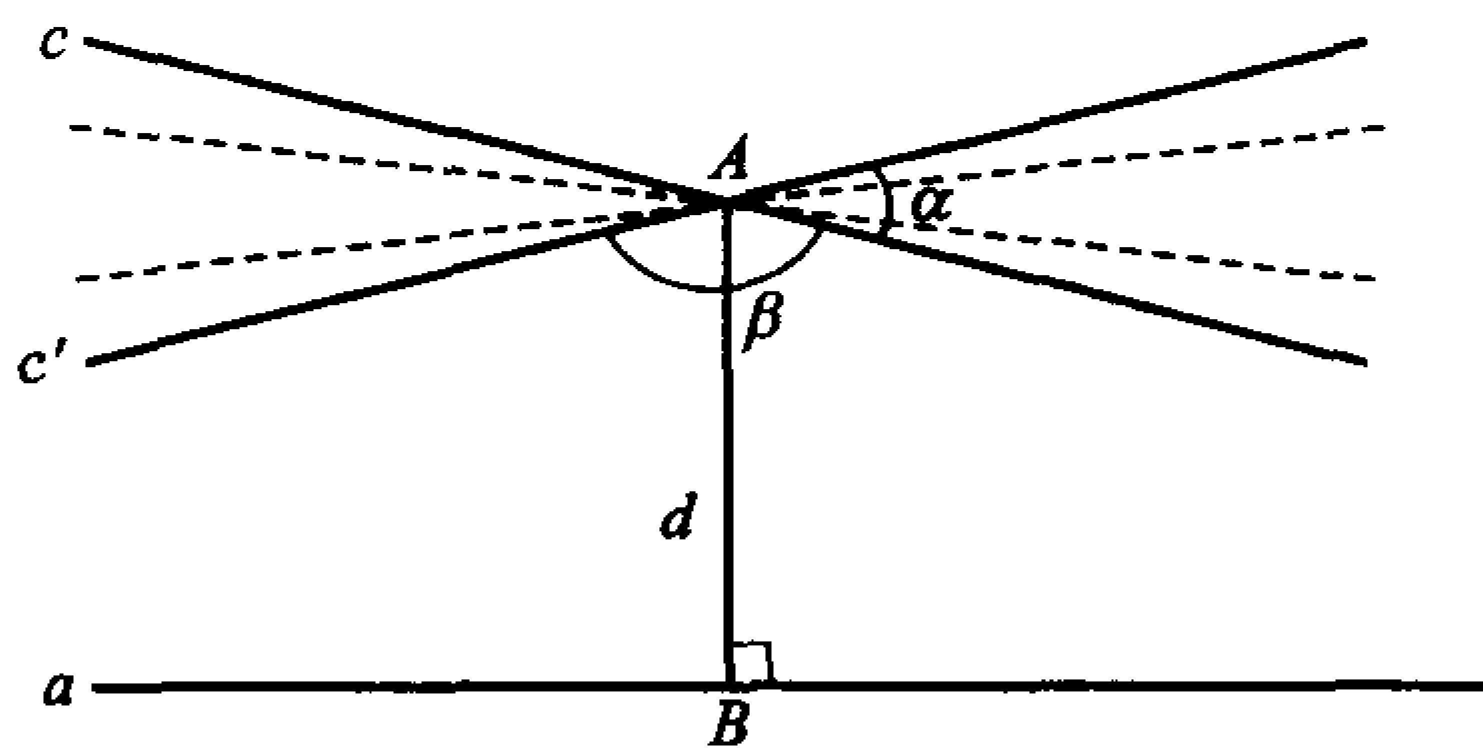


图 9.5

夫斯基称 c 与 c' 为 a 的"平行线",而落在角 α 内的所有直线叫不相交直线.如果按不相交即平行的意义理解,那么罗巴切夫斯基的几何里,过直线外一点就可以引无穷多条直线与给定的直线平行.

罗巴切夫斯基还将夹角 β 的一半称为"平行角",因 β 小于两直角,故平行角小于直角.罗巴切夫斯基发现,平行角是点 A 到直线 a 的距离 d 的函数.若把平行角记作 $\pi(d)$,则 $\pi(d)=\frac{\pi}{2}$ 时,就得到欧氏平行公设.若 $d\to 0$,则 $\pi(d)$ 单调增加且趋于 $\frac{\pi}{2}$;而 $d\to\infty$ 时,$\pi(d)$ 单调减少且趋于0.换句话说,如果在离直线 a 很远处作与此直线垂线夹角很小的直线,那么我们可以沿着这条"倾斜"的直线前进而永远不与直线 a 相遇!用欧氏几何的眼光来看,罗巴切夫斯基几何还有许多令人惊奇的结果,我们只能举一些例子,如:

1. 三角形三内角之和小于两直角,假如三角形变大,使它所有三条高都无限增长,则它的三个内角全部趋向于零;

2. 不存在面积任意大的三角形;

3. 如果两个三角形的三个角相等,它们就全等;

4. 圆周长 p 不与半径 r 成正比,而是更迅速地增长,并符合下面的公式

$$p=\pi k\left(e^{\frac{r}{k}}-e^{-\frac{r}{k}}\right),$$

其中 k 是依赖于长度单位的常数.利用 $e^{\frac{r}{k}}$ 的级数展开又可以得到

$$p=2\pi r\left(1+\frac{1}{6}\frac{r^2}{k^2}+\cdots\right).$$

因此,常数 k 越大,$\frac{r}{k}$ 就越小,上述公式就越接近于普通欧氏几何中的圆周长公式 $p = 2\pi r$. 这只是一个例子,说明罗巴切夫斯基几何在极限情形下就变成欧几里得几何.

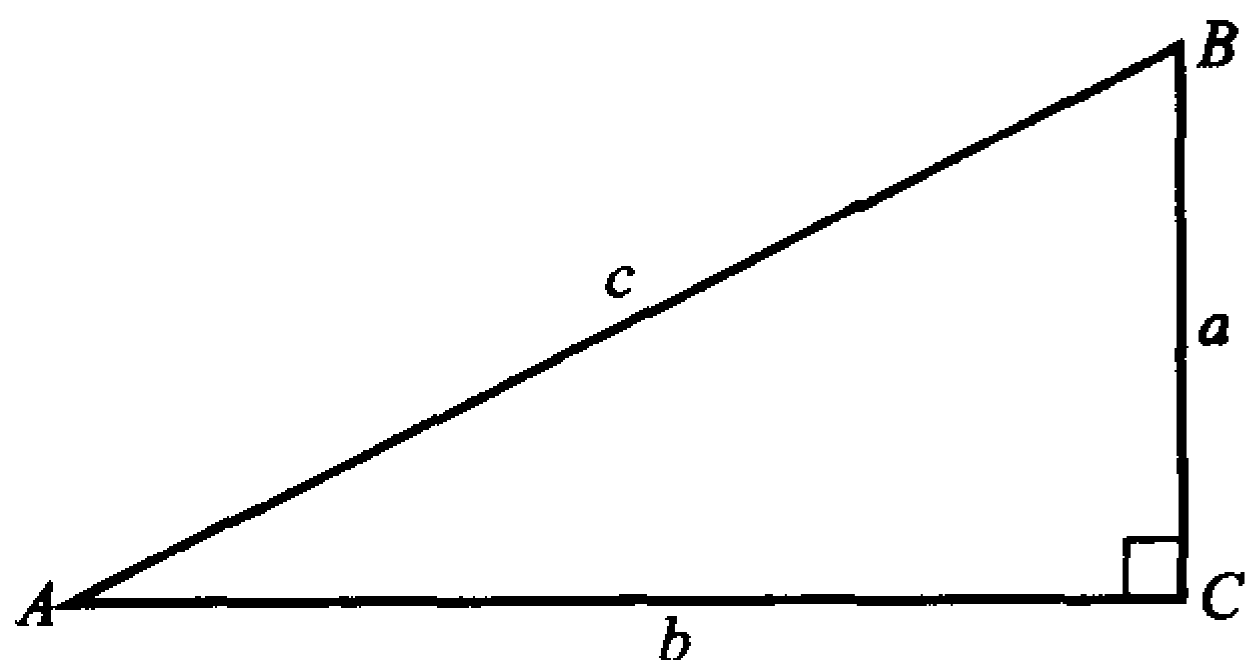


图 9.6

罗巴切夫斯基还发展了非欧三角学,得出一系列三角公式,主要有(图 9.6):

$$\cot\pi(a) = \cot\pi(c)\sin A,$$
$$\sin A = \cos B\sin\pi(b),$$
$$\sin\pi(c) = \sin\pi(a)\sin\pi(b).$$

我们不可能在这里全面展开罗巴切夫斯基几何的技术内容,并具体推导那些公式、结论. 当罗巴切夫斯基一开始公布他的这些新几何学的定理时,的确遭到了高斯所预料的“波哀提亚人的叫嚣”. 许多人群起攻之,说新几何是“荒唐的笑语”,是“对有学问的数学家的嘲讽”等等. 面对种种攻击,罗巴切夫斯基表现出比高斯更有勇气. 一直到 1855 年,当他已是一位双目失明的老人时,他还口述发表了一本叫《泛几何学》的著作,坚信自己的新几何学的正确性. 罗巴切夫斯基同时坚信这种新的几何学终有一天“可以像别的物理规律一样用实验来检验”.

9.3 非欧几何的发展与确认

非欧几何从发现到获得普遍接受,经历了曲折的道路. 要达到这一目标,需要确实地建立非欧几何自身的无矛盾性和现实意义. 罗巴切夫斯基终其一生努力最后并没有实现这个目标. 在他之后,非欧几何的发

展正是朝着这样的方向进行的.

首先是德国数学家黎曼(B. Riemann, 1826—1866)在1854年发展了罗巴切夫斯基等人的思想而建立了一种更广泛的几何,即现在所称的黎曼几何.罗巴切夫斯基几何以及欧氏几何都只不过是这种几何的特例.黎曼的研究是以高斯关于曲面的内蕴微分几何为基础的.内蕴微分几何也是19世纪几何学的重大发展之一.我们知道,在蒙日等人开创的微分几何中,曲面是在欧氏空间内考察的,但高斯1828年发表的论文《关于曲面的一般研究》则提出了一种全新的观念,即一张曲面本身就构成一个空间.它的许多性质(如曲面上的距离、角度、总曲率 k 等)并不依赖于背景空间,这种以研究曲面内在性质为主的微分几何称为"内蕴微分几何".

在他1854年发表的题为《关于几何基础的假设》的演讲中,黎曼将高斯关于欧氏空间中曲面的内蕴几何推广为任意空间的内蕴几何.他把 n 维空间称作一个流形,n 维流形中的一个点,可以用 n 个参数 x_1, $x_2, \cdots, x_n$ 的一组特定值来表示,这些参数就叫作流形的坐标.

黎曼从定义两个邻近点的距离出发,假定这个微小距离的平方是一个二次微分齐式

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j,$$

其中 g_{ij} 是坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数,$g_{ij} = g_{ji}$,并且上式右边总取正值.这个表达式后来以"黎曼度量"著称.在此基础上,黎曼又定义了曲线的长度,两曲线在一点的交角等,所有这些度量性质都是仅由 $\mathrm{d}s^2$ 表达式中的系数 g_{ij} 确定的.黎曼还引进了流形曲率的概念.在黎曼几何中,最重要的一种对象就是所谓的常曲率空间(即在每一点上曲率都相等的流形),对于三维空间,有以下三种情形:

1. 曲率为正常数;
2. 曲率为负常数;
3. 曲率恒等于零.

黎曼指出后两种情形分别对应于罗巴切夫斯基的非欧几何学和通常的欧氏几何学,而第一种情形则是黎曼本人的创造,它对应于另一种非欧

几何学.在这种几何中,过已知直线外一点,不能作任何平行于该给定直线的直线.这实际上是以前面提到的萨凯里等人的钝角假设为基础而展开的非欧几何学.

在黎曼之前,从萨凯里到罗巴切夫斯基,都认为钝角假设与直线可以无限延长的假定矛盾,因而取消了这个假设.但黎曼区分了"无限"与"无界"这两个概念,认为直线可以无限延长并不意味着就其长短而言是无限的,只不过是说,它是无端的或无界的.可以证明,在对无限与无界概念作了区分以后,人们在钝角假设下也可像在锐角假设下一样,无矛盾地展开一种几何.这第二种非欧几何,也叫(正常曲率曲面上的)黎曼几何,或椭圆几何;作为区别,数学史文献上就把罗巴切夫斯基发现的非欧几何叫作罗巴切夫斯基几何,或双曲几何.普通球面上的几何就是黎曼非欧几何,其上的每个大圆可以看成是一条"直线".容易看出,任意球面"直线"都不可能永不相交(如图 9.7).

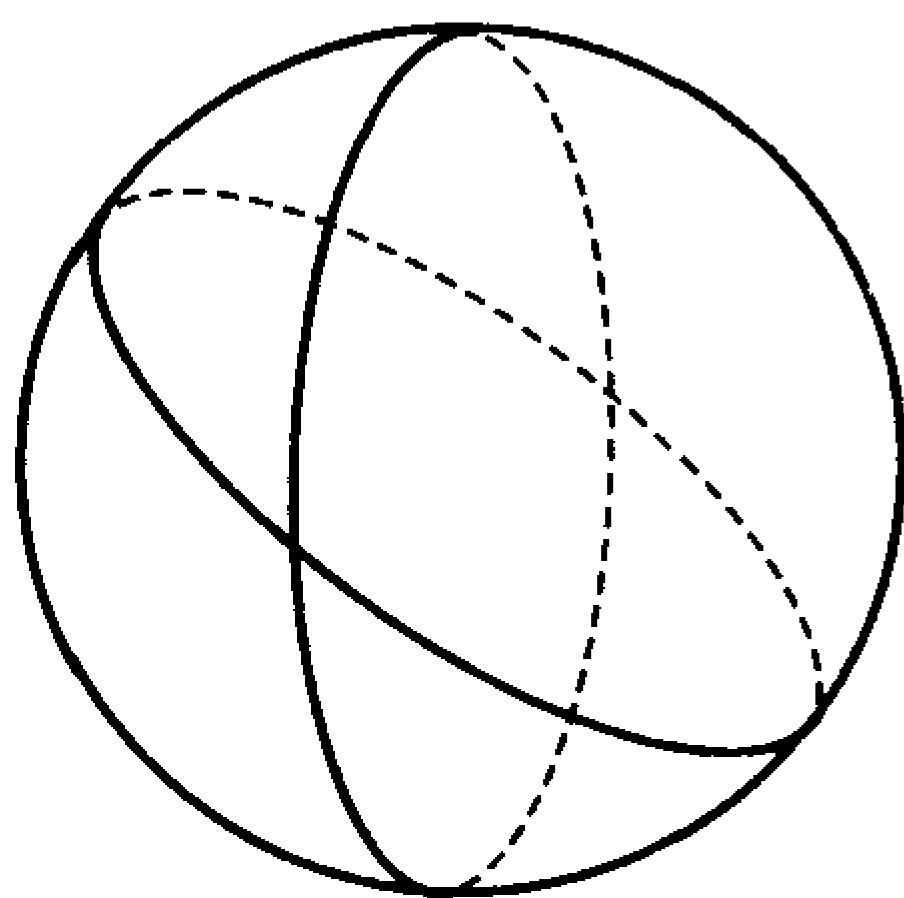


图 9.7

黎曼可以说是最先理解非欧几何全部意义的数学家.他创立的黎曼几何不仅是对已经出现的非欧几何(罗巴切夫斯基几何)的承认,而且显示了创造其他非欧几何的可能性.但黎曼的理论仍然难以被同时代人理解.他的上述演讲是在他出任哥廷根大学讲师一职时按规定所作的.为了照顾大多数听众,黎曼在其演讲中已经去掉了许多技术性的细节,尽管如此,但据说除了年迈的高斯外没有人能听懂黎曼的意思.

黎曼也是现代数学史上最具创造性的数学家之一.他 1826 年出生在一个牧师家庭,由于家庭环境的影响,黎曼最初进入哥廷根大学时学

的是神学和哲学,但不久他就喜欢上了数学,在征得父亲同意后,黎曼将数学选定为自己的专业.然而经过一年后,他发现哥廷根大学开设的数学课程过于陈旧,甚至连高斯也在讲初等的课程,于是他决定去柏林随雅可比、狄利克雷(Dirichlet)等数学家学习.1849年,黎曼重返哥廷根在高斯指导下做博士论文,题目为《单复变函数一般理论基础》.结果,这篇论文得到了高斯的赞赏,他以少有的激情给作者写了如下评语:"黎曼先生提交的博士论文提供了可信的证据,表明作者对他的论文所涉及的主题进行了全面、深入的研究,显示了一个具有创造力的、活跃的、真正数学的头脑以及了不起的富有成果的独创性."后来,黎曼在狄利克雷之后继承了高斯在哥廷根的数学教授席位.不幸的是,黎曼正值他的创造高峰时因感染上肺结核而去世,死时还不到40岁.黎曼在他短暂的一生中,对于几何、分析和物理学的众多领域都作了开创性的贡献.有数学家评论说:"黎曼是一个富有想象的天才,他的想法即使没有证明,也鼓舞了整整一个世纪的数学家."



图9.8 黎曼

19世纪70年代以后,意大利数学家贝尔特拉米(E.Beltrami,1835—1899)、德国数学家克莱因和法国数学家庞加莱等人先后在欧几里得空间中给出了非欧几何的直观模型,从而揭示出非欧几何的现实意义.至此,非欧几何才真正获得了广泛的理解.

贝尔特拉米的模型是从内蕴几何观点提出的,这是一个叫"伪球面"的曲面,它由平面曳物线绕其渐近线旋转一周而得(图9.9).贝尔特拉米证明,罗巴切夫斯基平面片上的所有几何关系与适当的"伪球面"(具有负常曲率)片上的几何关系相符合;也就是说,对应于罗巴切夫斯基几何的每一断言,就有一个伪球面上的内蕴几何事实.这使罗氏几何立刻就有了现实意义.但需指出的是,贝尔特拉米实现的并非整个罗巴切夫斯基几何,而是其片段上的几何.因而,还没有解决全部罗氏几何的无矛盾性问题.这个问题不久就被克莱因解决了.

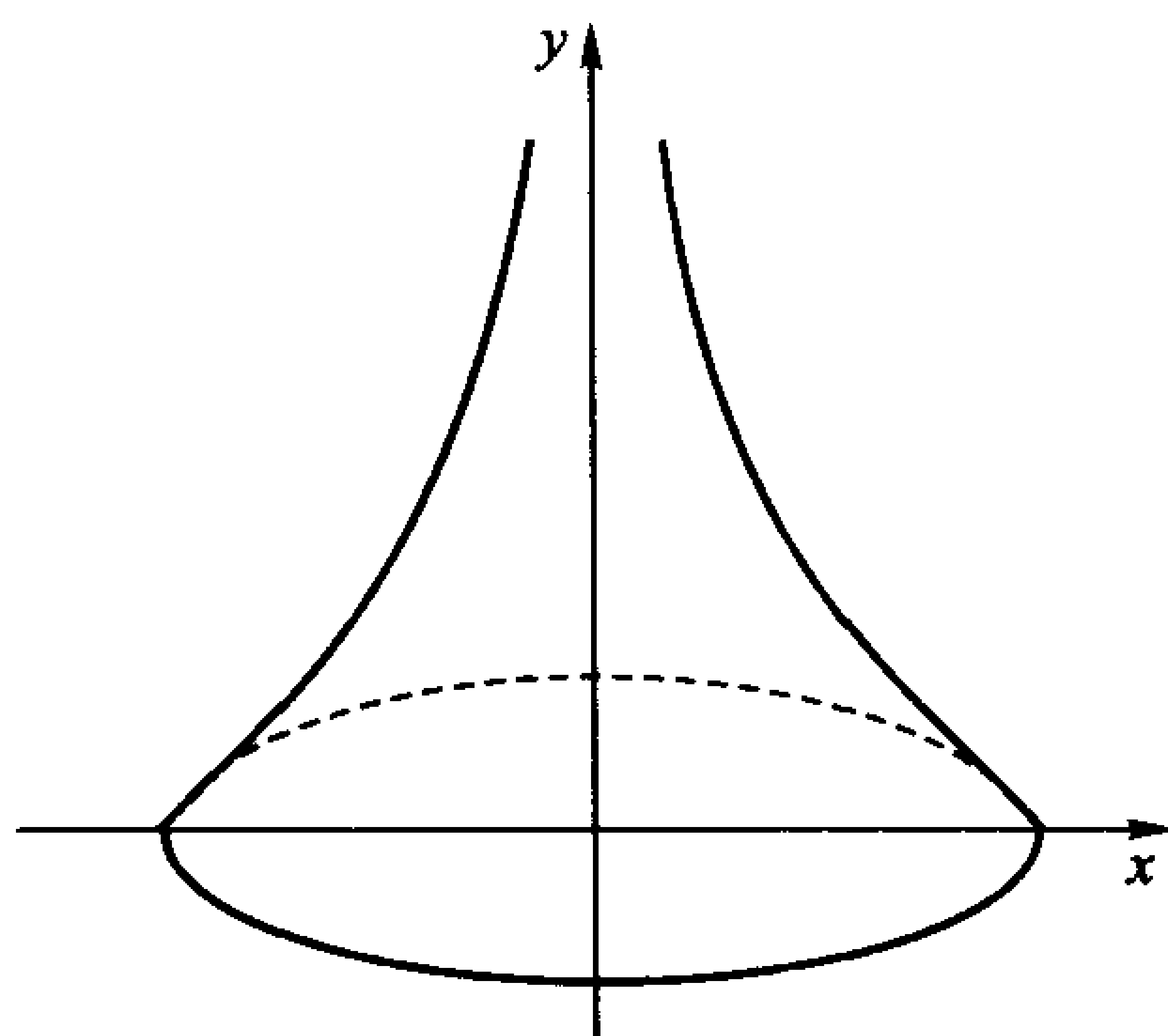


图 9.9

克莱因的模型比贝尔特拉米的简单明了．在普通欧氏平面上取一个圆，并且只考虑整个圆的内部．他约定把圆的内部叫“平面”，圆的弦叫“直线”(根据约定将弦的端点除外)．可以证明，这种圆内部的普通(即欧氏)几何事实就变成罗巴切夫斯基几何的定理，而且反过来，罗巴切夫斯基几何中的每个定理都可以解释成圆内部的普通几何事实．

我们用一个简单的例子来说明．根据约定，将罗巴切夫斯基几何公设翻译成欧氏几何语言，就得到如下断言：通过圆内不在已知弦上的一点，至少可以引两条弦不与已知弦相交．另外，我们回想起，罗氏几何中通过已知点不与已知直线相交的直线中，有两条是边界，罗氏将这两条边界叫作已知直线的平行线．同样根据约定，可以将上述事实翻译成欧氏几何语言：通过已知点 A 不与已知弦 BC 相交的弦中，有两条边界弦．实际上，这两条边界弦就是分别通过 A、B 两点和 A、C 两点(但不包含 B 点和 C 点)的两条弦(图 9.10)．为了进一步将罗氏几何定理翻译成欧氏几何语言，需要指出在圆内如何测量线段的长度和两条线的夹角．这种测量显然不能等同于普通的欧氏测量．例如，对于圆内两点 P,Q 之间的距离(图 9.11)，克莱因的定义如下：

$$d(P,Q)=\log[(QS)(PT)/(PS)(QT)],$$

其中 S,T 是 P,Q 确定的直线与圆周的交点．

在克莱因之后，庞加莱也对罗巴切夫斯基几何给出了一个欧氏模

型.这样一来,就使非欧几何具有了至少与欧氏几何同等的真实性.因为我们可以设想,如果罗氏几何中存在任何矛盾的话,那么这种矛盾也必然会在欧氏几何中表现出来,也就是说,只要欧氏几何没有矛盾,那么罗巴切夫斯基几何也不会有矛盾.至此,非欧几何作为一种几何的合法地位可以说充分建立起来了.

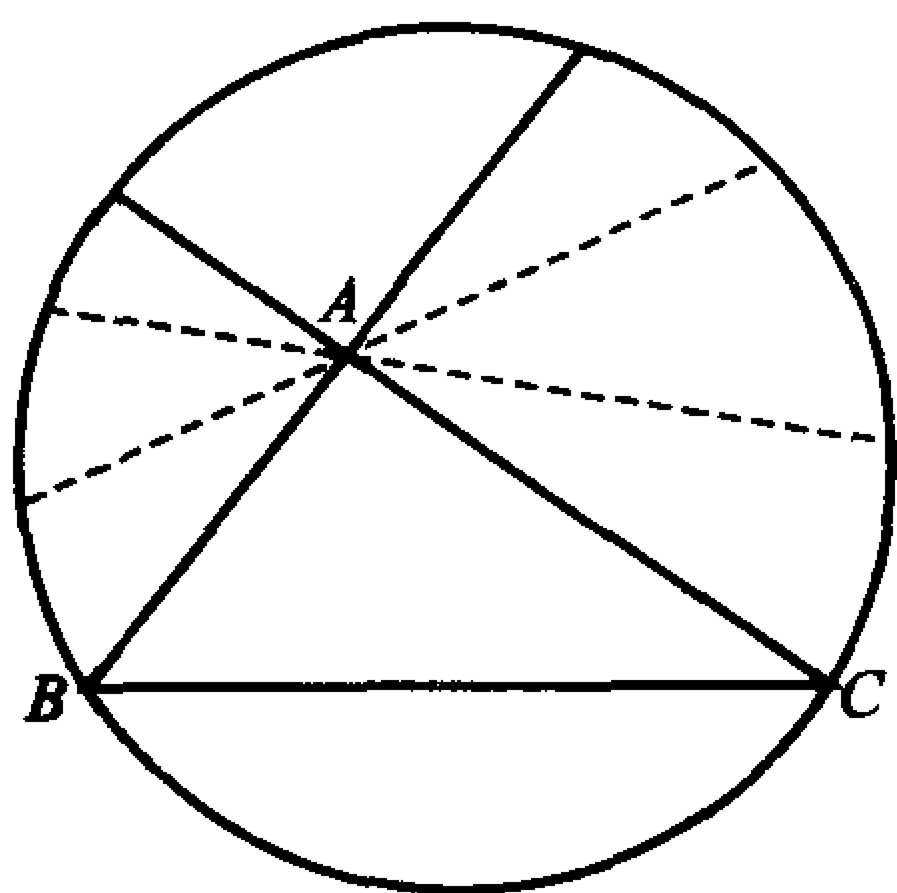


图 9.10

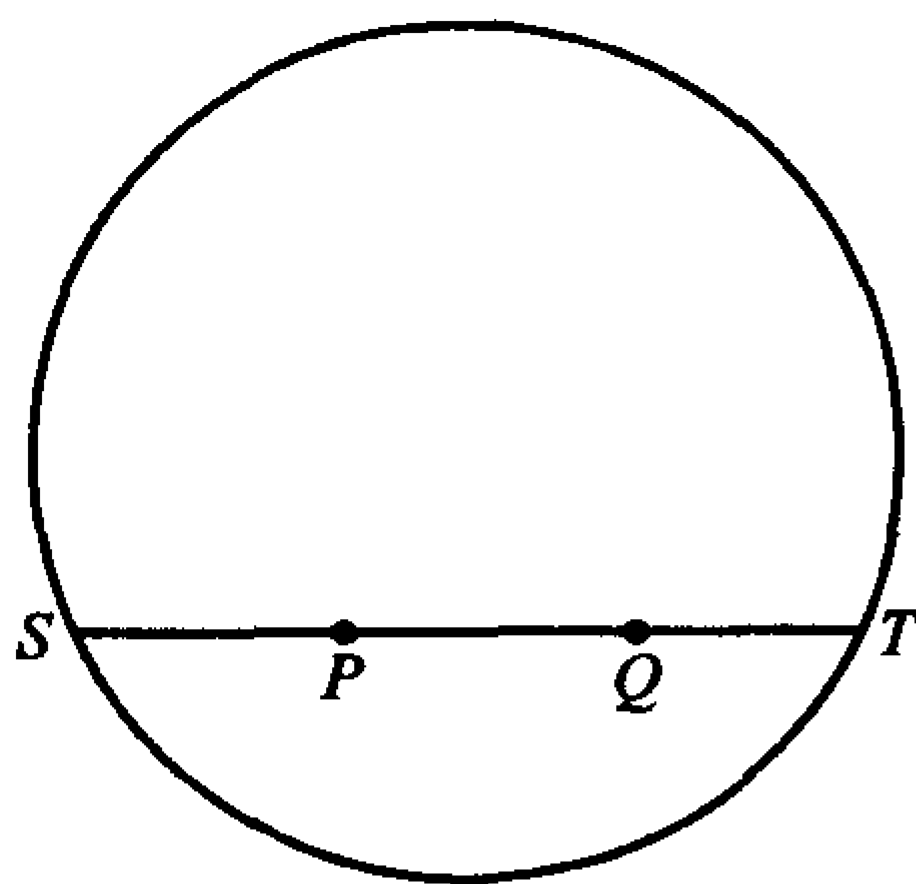


图 9.11

9.4　射影几何的繁荣

非欧几何揭示了空间的弯曲性质,将平直空间的欧氏几何变成了某种特例.实际上,如果将欧几里得几何限制于其原先的涵义——三维、平直、刚性空间的几何学,那么19世纪的几何学就可以理解为一场广义的"非欧"运动:从三维到高维;从平直到弯曲;…… 而射影几何的发展,又从另一个方向使"神圣"的欧氏几何再度"降格"为其他几何的特例.

在19世纪以前,射影几何一直是在欧氏几何的框架下被研究的,其早期开拓者德沙格、帕斯卡等主要是以欧氏几何的方法处理问题,并且他们的工作由于18世纪解析几何与微积分发展的洪流而被人遗忘.到18世纪末与19世纪初,蒙日的《画法几何学》(Geometrie descriptive, 1799)以及蒙日学生卡诺(L. Carnot)等人的工作,重新激发了人们对综合射影几何的兴趣.不过,将射影几何真正变革为具有自己独立的目标与方法的学科的数学家,是曾受教于蒙日的庞斯列(J-V. Poncelet, 1788—1867).

庞斯列曾任拿破仑远征军的工兵中尉,1812年莫斯科战役法军溃

败后被俘，度过了两年铁窗生活.然而正是在这两年里，庞斯列不借助于任何书本，以炭代笔，在俄国萨拉托夫监狱的墙壁上谱写了射影几何的新篇章.庞斯列获释后对自己在狱中的工作进行了修订、扩充，于1822年出版了《论图形的射影性质》(Traité des propriétés projectives des figures)，这部著作立即掀起了19世纪射影几何发展的巨大波澜，带来了这门学科历史上的黄金时期.

与德沙格和帕斯卡等不同，庞斯列并不限于考虑特殊问题.他探讨的是一般问题：图形在投射和截影下保持不变的性质，这也成为他以后射影几何研究的主题.由于距离和交角在投射和截影下会改变，庞斯列选择并发展了对合与调和点列的理论而不是以交比的概念为基础.与他的老师蒙日也不同，庞斯列采用中心投影而不是平行投影，并将其提高为研究问题的一种方法.在庞斯列实现射影几何目标的一般研究中，有两个基本原理扮演了重要角色.

首先是连续性原理，它涉及通过投影或其他方法把某一图形变换成另一图形的过程中的几何不变性.用庞斯列本人的话说，就是："如果一个图形从另一个图形经过连续的变化得出，并且后者与前者一样地一般，那么可以马上断定，第一个图形的任何性质第二个图形也有."作为这个原理的一个例子，庞斯列举了圆内相交弦的截段之积相等的定理，当交点位于圆的外部时，它就变成了割线的截段之积的相等关系.而如果其中的一条割线变成圆的切线，那么这个定理仍然成立，只不过要把这条割线的截段之积换成切线的平方(参见图9.12和图9.13).

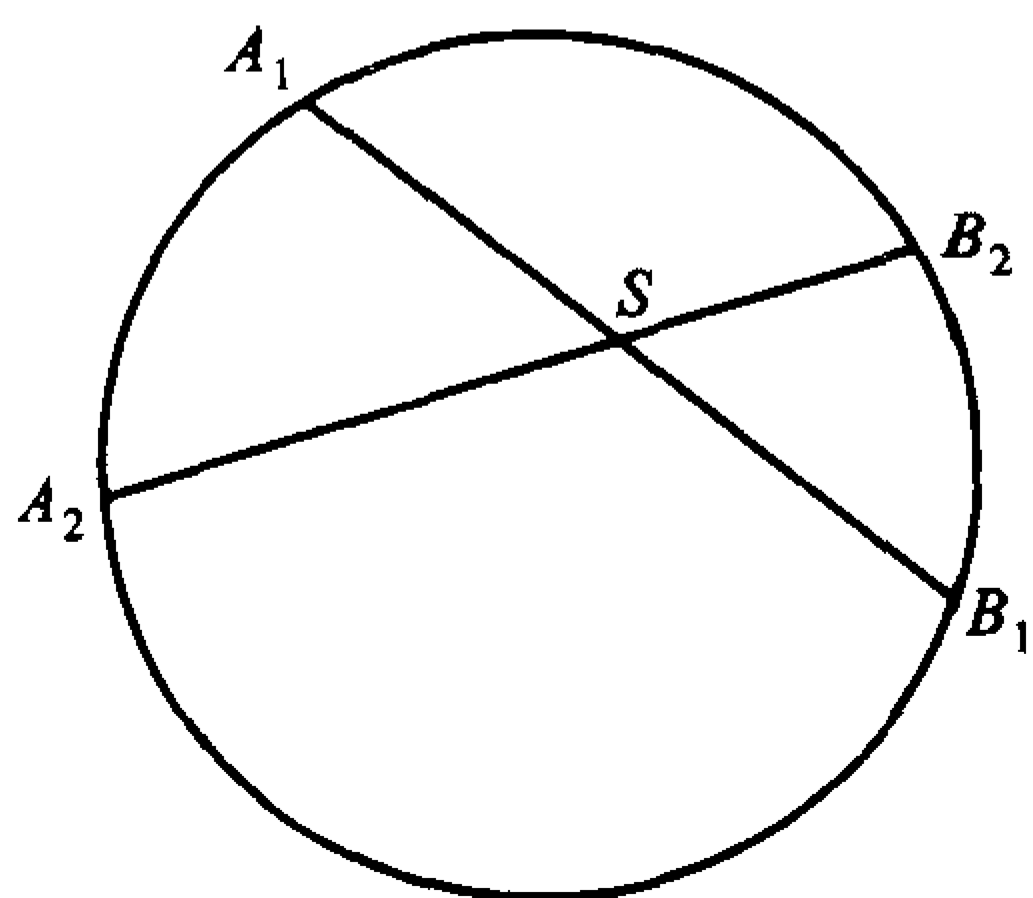


图9.12

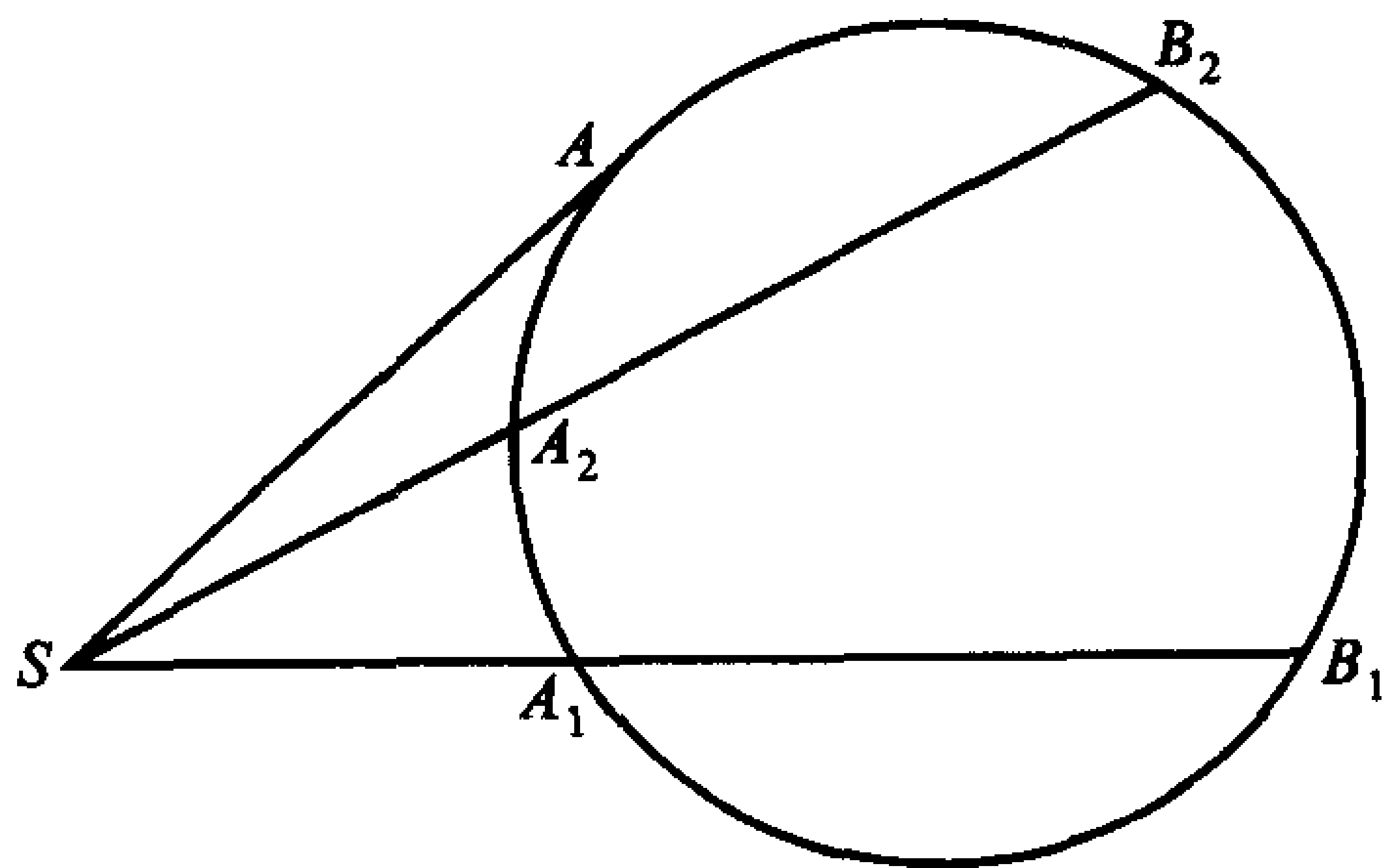


图9.13

这个原理卡诺也曾用过,但庞斯列将它发展到包括无穷远点的情形.因此,我们总可以说两条直线是相交的,交点或者是一个普通的点,或者是一个无穷远处的点(平行线的情形).除了无穷远元素,庞斯列还利用连续性原理来引入虚元素.例如两个相交的圆,其公共弦当两圆逐渐分离并变得不再相交时,就成为虚的.无穷远元素与虚元素在庞斯列为达到射影几何的一般性工作中发挥了重要作用.

庞斯列强调的另一个原理是对偶原理.射影几何的研究者们曾经注意到,平面图形的"点"和"线"之间存在着异乎寻常的对称性,如果在它所涉及的定理中,将"点"换成"线",同时将"线"换成"点",那么就可以得到一个新的定理.例如考虑著名的帕斯卡定理:

如果将一圆锥曲线的6个点看成是一个六边形的顶点,那么相对的边的交点共线(图9.14).

它的对偶形式则是:

如果将一圆锥曲线的6条切线看成是一个六边形的边,那么相对的顶点的连线共点(图9.15).

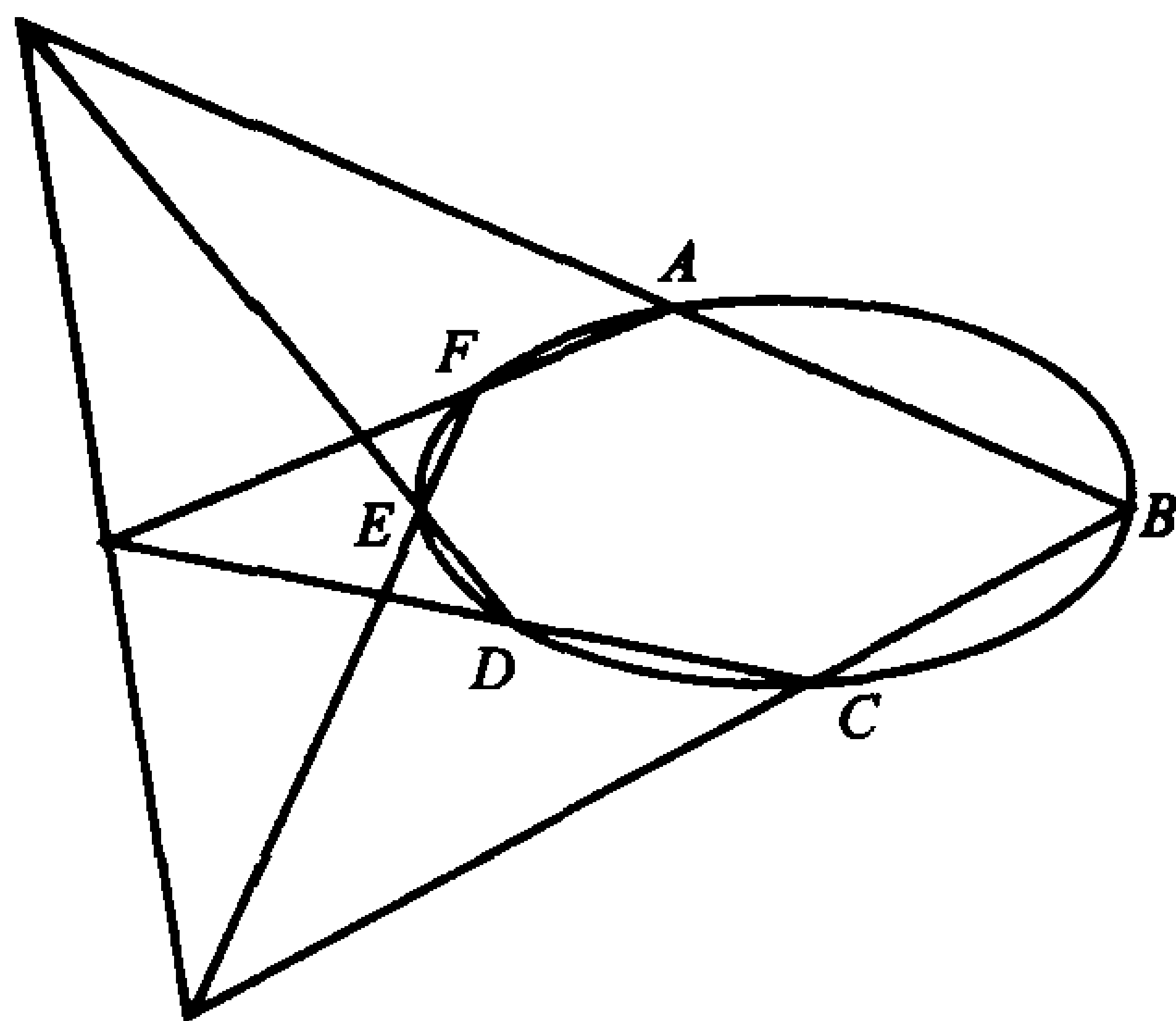


图9.14

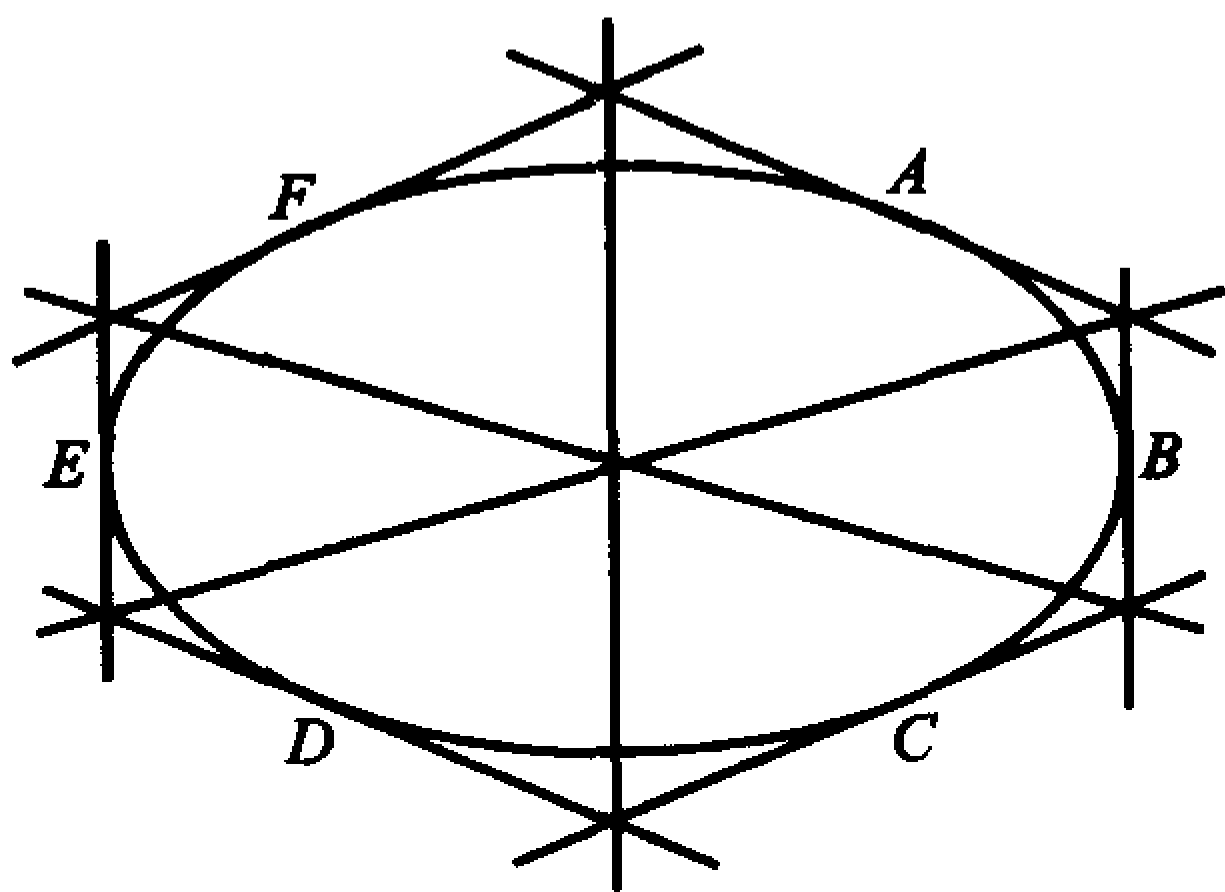


图9.15

帕斯卡定理的对偶形式是布里昂雄(C. – J. Brianchon)在1806年发现的,所以常被称为布里昂雄定理,而这离帕斯卡最初陈述他的定理已有近二百年的光景.

虽然布里昂雄发现了帕斯卡定理的对偶定理,但包括他在内的许多数学家对于对偶原理为什么行得通仍是不清楚,事实上,布里昂雄还曾怀疑过这个原理.庞斯列射影几何工作中很重要的一部分,就是为建立对偶原理而发展了配极的一般理论.他深入研究了圆锥曲线的极点与极线的概念,给出了从极点到极线和从极线到极点的变换的一般表述.

与庞斯列用综合的方法为射影几何奠基的同时,德国数学家默比乌斯(A. F. Möbius,1790—1868)和普吕克(J. Plücker,1801—1868)开创了射影几何研究的解析(或代数)途径.默比乌斯在《重心计算》(1827)一书中第一次引进了齐次坐标,这种坐标后被普吕克发展为更一般的形式,它相当于把笛卡儿坐标 x,y 换成 $x=\frac{x_1}{x_3}, y=\frac{x_2}{x_3}$.齐次坐标成为代数地推导包括对偶原理在内许多射影几何基本结果的有效工具.但这种代数的方法遭到了以庞斯列为首的综合派学者的反对,19 世纪的射影几何就是在综合的与代数的这两大派之间的激烈争论中前进的.支持庞斯列的数学家还有斯坦纳(J. Steiner)、沙勒(M. Chasles)和施陶特(K. G. C. von Staudt)等,其中施陶特的工作对于确立射影几何的特殊地位有决定性的意义.

到 1850 年前后,数学家们对于射影几何与欧氏几何在一般概念与方法上已作出了区别,但对这两种几何的逻辑关系仍不甚了了.即使是综合派的著作中也依然在使用长度的概念,例如作为射影几何中心概念之一的交比,就一直是用长度来定义的,但长度在射影变换下会发生改变,因而不是射影概念.施陶特在 1847 年出版的《位置几何学》中提出一套方案,通过给每个点适当配定一个识别标记(也称作坐标)而给交比作了重新定义.如果四点的"坐标"记为 x_1, x_2, x_3, x_4,那么交比就定义为

$$\frac{x_1-x_3}{x_1-x_4}\bigg/\frac{x_2-x_3}{x_2-x_4}.$$

这样施陶特不借助长度概念就得以建立射影几何的基本工具,从而使射影几何摆脱了度量关系,成为与长度等度量概念无关的全新学科.施陶特还指出:射影几何的概念在逻辑上要先于欧氏几何概念,因而射影

几何比欧氏几何更基本. 施陶特的工作鼓舞了英国数学家凯莱(A. Cayley, 1821—1895)和普吕克的学生克莱因进一步在射影几何概念基础上建立欧氏几何乃至非欧几何的度量性质,明确了欧氏几何与非欧几何都是射影几何的特例,从而为以射影几何为基础来统一各种几何学铺平了道路.

9.5　几何学的统一

在数学史上,罗巴切夫斯基被称为"几何学上的哥白尼". 这是因为非欧几何的创立不只是解决了两千年来一直悬而未决的平行公设问题,更重要的是它引起了关于几何观念和空间观念的最深刻的革命.

首先,非欧几何对于人们的空间观念产生了极其深远的影响. 在19世纪,占统治地位的是欧几里得的绝对空间观念. 非欧几何的创始人无一例外地都对这种传统观念提出了挑战. 高斯早在1817年就在给朋友的一封信中写道:"我越来越深信我们不能证明我们的欧几里得几何具有物理的必然性,至少不能用人类的理智——给出这种证明. 或许在另一个世界中我们可能得以洞悉空间的性质,而现在这是不可能达到的." 高斯曾一度把他的非欧几何称为"星空几何",而从罗巴切夫斯基到黎曼,他们也都相信天文测量将能判断他们的新几何的真实性,认为欧氏公理可能只是物理空间的近似写照. 他们的预言,在20世纪被爱因斯坦(A. Einstein, 1879—1955)的相对论所证实. 正是黎曼几何为爱因斯坦的广义相对论提供了最恰当的数学表述,而根据广义相对论所进行的一系列天文观测、实验,也证实了宇宙流形的非欧几里得性.

其次,非欧几何的出现打破了长期以来只有一种几何学即欧几里得几何学的局面. 19世纪中叶以后,通过否定欧氏几何中这样或那样的公设、公理,产生了各种新而又新的几何学,除了上述几种非欧几何、黎曼几何外,还有如非阿基米德几何、非德沙格几何、非黎曼几何、有限几何等等,加上与非欧几何并行发展的高维几何、射影几何,微分几何以及较晚出现的拓扑学等,19世纪的几何学展现了无限广阔的发展前景. 在这样的形势下,寻找不同几何学之间的内在联系,用统一的观点

来解释它们,便成为数学家们追求的一个目标.

统一几何学的第一个大胆计划是由德国数学家克莱因(F. Klein, 1849—1925)提出的. 1872年,克莱因被聘为爱尔朗根大学的数学教授,按惯例,他要向大学评议会和哲学院作就职演讲,克莱因的演讲以《爱尔朗根纲领》著称,正是在这个演讲中,克莱因基于自己早些时候的工作以及挪威数学家李(S. Lie)在群论方面的工作,阐述了几何学统一的思想:所谓几何学,就是研究几何图形对于某类变换群保持不变的性质的学问,或者说任何一种几何学只是研究与特定的变换群有关的不变量. 这样一来,不仅19世纪涌现的几种重要的、表面上互不相干的几何学被联系到一起,而且变换群的任何一种分类也对应于几何学的一种分类.

例如(就平面的情况),欧几里得几何研究的是长度、角度、面积等这些在平面中的平移和旋转下保持不变的性质. 平面中的平移和旋转(也称刚性运动)构成一个变换群. 刚性平面变换可以用代数式表示出来:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \end{cases}$$

其中 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$. 这些式子构成了一个群的元素,而将这种元素结合在一起的"运算"就是依次进行这种类型的变换. 容易看出,如果在进行上述变换后紧接着进行第二个变换:

$$\begin{cases} x'' = b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}, \\ y'' = b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}, \end{cases}$$

其中 $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 1$. 那么相继进行这两个变换的结果,就等价于某个单一的这一类型的变换将点(x, y)变成点(x'', y'').

如果在上述变换中,将限制 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$ 用更一般的要求 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 来替代,那么这种新变换也构成一个群. 然而,在这样的变换下,长度和面积不再保持不变,不过一个已知种类的圆锥曲线(椭圆,抛物线或双曲线)经过变换后仍是同一种类的圆锥曲线. 这样的变换称为仿射变换,它们所刻画的几何称为仿射几何. 因此,按照克莱因的观点,欧几里得几何只是仿射几何的一个特例.

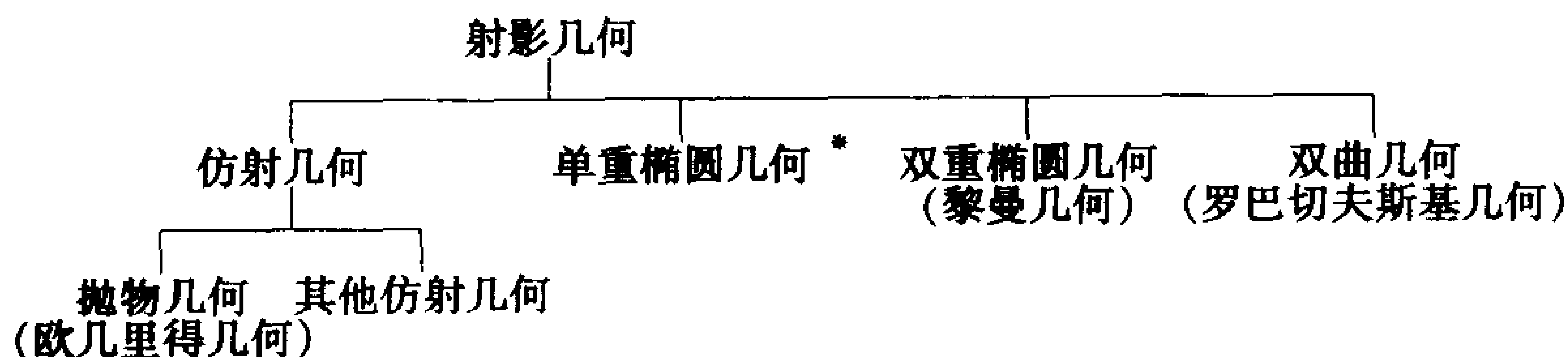
仿射几何则是更一般的几何——射影几何的一个特例. 一个射影

变换可以写成如下形式:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \\ y' = \dfrac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \end{cases}$$

其中 a_{ij} 的行列式必须不为零.射影变换下的不变量有线性、共线性、交比、调和点组以及保持圆锥曲线不变等.显然,如果 $a_{31} = a_{32} = 0$ 并且 $a_{33} = 1$,射影变换就成了仿射变换.

下表反映了以射影几何为基础的克莱因几何学分类中一些主要几何间的关系:



在克莱因的分类中,还包括了当时的代数几何和拓扑学.克莱因对拓扑学的定义是"研究由无限小变形组成的变换的不变性".这里"无限小变形"就是一一对应的双方连续变换.拓扑学在 20 世纪才获得独立的发展并成为现代数学的核心学科之一.克莱因在 1872 年就提出把拓扑学作为一门重要的几何学科,确实是有远见的看法.

并非所有的几何都能纳入克莱因的方案,例如今天的代数几何和微分几何,然而克莱因的纲领的确能给大部分的几何提供一个系统的分类方法,对几何思想的发展产生了持久的影响.

克莱因发表爱尔朗根纲领时年仅 23 岁.1886 年,他受聘到哥廷根

---

* 在黎曼椭圆几何中,过任意二点所作直线不一定唯一,例如过一球面的两个极点可作无数条"直线"(大圆),克莱因指出还存在着另一种椭圆几何,其中过任意二点能且只能作一条直线,克莱因称这种几何为"单重椭圆几何",而将黎曼椭圆几何称为"双重椭圆几何".单重椭圆几何是克莱因的发现,他还给出了这种几何的一个模型 —— 包括边界在内的半球面,边界上直径相对两端的任意二点被看作是一个点.

大学担任教授.克莱因是这样一位数学家,在他身上,创造天才与组织能力完美地融合在一起.他的到来,使哥廷根这座具有高斯、黎曼传统的德国大学更富科学魅力,在被引向哥廷根的许多年轻数学家中,最重要的一位是希尔伯特(D.Hilbert,1862—1943).



图9.16　克莱因

正是这位希尔伯特,在来到哥廷根3年以后,提出了另一条对现代数学影响深远的统一几何学的途径——公理化方法.公理化方法始于欧几里得,然而当19世纪数学家们重新审视《原本》中的公理体系时,却发现它有许多隐蔽的假设,模糊的定义及逻辑的缺陷,这就迫使他们着手重建欧氏几何以及其他包含同样弱点的几何的基础.这项探索从一开始就是在对几何学作统一处理的观点下进行的.在所有这些努力中,希尔伯特在《几何基础》(Grundlagen der Geometrie,1899)中使用的公理化方法最为成功.公理化方法是从公理出发来建造各种几何.希尔伯特在这方面的划时代贡献在于,他比任何前人都更加透彻地弄清了公理系统的逻辑结构与内在联系.《几何基础》中提出的公理系统包括了20条公理,希尔伯特将它们划分为五组:

Ⅰ.1-8　关联公理;
Ⅱ.1-4　顺序公理;
Ⅲ.1-5　合同公理;
Ⅳ.　平行公理;
Ⅴ.1-2　连续公理.

在这样自然地划分公理之后,希尔伯特在历史上第一次明确地提出了选择和组织公理系统的原则,即:

1.相容性.从系统的公理出发不能推出矛盾,故亦称"无矛盾性";
2.独立性.系统的每一条公理都不能是其余公理的逻辑推论;
3.完备性.系统中所有的定理都可由该系统的公理推出.

在这样组织起来的公理系统中,通过否定或者替换其中的一条或

几条公理,就可以得到相应的某种几何.例如用罗巴切夫斯基平行公理替代欧几里得平行公理,而保持其余所有公理不变,就可以得到双曲几何;如果在抛弃欧氏平行公理的同时,添加任意两条直线都有一个公共点或至少有一个公共点的公理,并适当改变另外一些公理,就分别得到单重与双重椭圆几何,等等.这样的做法,不仅给出了已有几门非欧几何的统一处理,而且还可以引出新的几何学.最有趣的例子便是"非阿基米德几何",即通过忽略连续公理(亦称阿基米德公理)而建造的几何学.这是希尔伯特本人的创造,《几何基础》中用了整整5章的篇幅来展开这种新的几何学.我们在后面会看到,希尔伯特所发展的这种形式公理化方法在20世纪已远远超出了几何学的范围而成为现代数学甚至某些物理领域中普遍应用的科学方法.

分析的严格化

10

10.1 柯西与分析基础

经过近一个世纪的尝试与酝酿，数学家们在严格化基础上重建微积分的努力到19世纪初开始获得成效.这方面的先声来自捷克学者波尔察诺(B. Bolzano, 1781—1848)，他在1817年发表了《纯粹分析证明》，以证明连续函数的中值定理为目的，其中包含了对函数连续性、导数等概念的合适定义，但波尔察诺的工作长期湮没无闻.19世纪分析严格化真正有影响的先驱是法国数学家柯西(A.-L. Cauchy, 1789—1851).

柯西长期担任巴黎综合工科学校教授，他有许多著作都是以工科大学讲义形式面世的.在分析方法方面，他写出了一系列著作，其中最有代表性的是《分析教程》(Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique, 1821)和《无限小计算教程概论》(Résumé des lesons données á l'Ecole Royale polytechnique sun les calcul infinitésimal, 1823)，它们以严格化为目标，对微积分的基本概念，如变量、函数、极限、连续性、导数、微分、收敛等等给出了明确的定义，并在此基础上重建和拓展了微积分



图10.1 柯西

的重要事实与定理.以下是这方面的一些例子：

1.变量.“依次取许多互不相同的值的量叫作变量”.

2.函数.“当变量之间这样联系起来的时候,即给定了这些变量中的一个值,就可以决定所有其他变量的值的时候,人们通常想象这些量是用其中的一个来表达的,这时这个量就取名为自变量,而由这些自变量表示的其他量就叫作这个自变量的函数”.按照这个定义,不仅无穷级数可以规定一个函数,而且也突破了函数必须有解析表达式的要求.

3.极限.“当同一变量逐次所取的值无限趋向于一个固定的值,最终使它的值与该定值的差要多小就多小,那么最后这个定值就称为所有其他值的极限”.

4.无限小量.“当同一变量逐次所取的绝对值无限减小,以致比任意给定的数还要小,这个变量就是所谓的无限小或无限小量”.柯西的无限小不再是一个无限小的固定数.

5.连续函数.柯西第一次解决了函数连续性的定义问题.按他的定义,函数 $f(x)$ 在给定限之间关于 x 保持连续,如果在这两限之间变量的每个无限小增量总产生函数 $f(x)$ 本身的一个无限小增量.以往欧拉所说的“连续”是指光滑(即可微)函数,而在 18 世纪后期关于弦振动所引起的争论中,数学家们则把“连续性”理解为函数具有一致的解析表达式.

6.导数与微分.柯西把导数明确定义为差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad \Delta x=h.$$

当 h 无限地趋向于零的极限,函数的微分则定义为 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.以往常常是先取某种形式的微分作为基本概念,而把 $y=f(x)$ 的导数作为表达式 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 的“微分系数”而引入.

7.积分.柯西首先指出,在研究积分或原函数的各种性质以前,应先证明它们是存在的.也就是说需要首先对一大类函数给出积分的一般定义.设函数 $f(x)$ 在给定区间$[x_0,x]$上连续,并用点 $x_0,x_1,\cdots,x_n=x$ 把区间$[x_0,x]$划分为 n 个子区间,对应于每个这样的划分,构造近似和：

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

柯西证明这个和数当区间长 $x_i - x_{i-1}$ 趋向于零时的极限与划分的方式无关，并把这个极限定义为 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x]$ 上的积分 $\int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x$. 这个定义后来被黎曼直接推广，将每个区间端点 x_{i-1} 用区间内任一点 $\bar{x}_i$ 来代替，就得到现在所说的黎曼积分.

在以上一系列定义的基础上，柯西得以严格地表述并证明微积分基本定理，中值定理等一系列重要定理，如微积分基本定理被表述为：在区间 $[x_0, x]$ 上给定连续函数 $f(x)$，对于 $x \in [x_0, x]$，由

$$\widetilde{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x$$

定义的新函数 $\widetilde{F}(x)$ 就是 $f(x)$ 的原函数或反导数，即在 $[x_0, x]$ 上有

$$\widetilde{F}'(x) = f(x).$$

柯西还对无穷级数进行了严格化处理，明确定义了级数的收敛性，并研究了判别级数收敛的条件. 令

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

是所研究的无穷级数前 n 项的和，n 为自然数，若当 n 趋向于无限大时，和 S_n 无限趋近于某一极限 S，柯西就说级数是收敛的.

柯西的工作向分析的全面严格化迈出了关键的一步. 我们看到，他的许多定义和论述已经相当接近于微积分的现代形式，像上面所举的微积分基本定理，几乎与今天的微积分教科书完全一样(区别仅在于现代教科书中为了区别积分号下的哑变量与上限变量，往往将 $f(x)\mathrm{d}x$ 换作 $f(t)\mathrm{d}t$). 柯西的研究结果一开始就引起了科学界很大的轰动. 据说柯西在巴黎科学院宣读第一篇关于级数收敛性的论文时，使年高望重的拉普拉斯大感困惑，会后急忙赶回家去检查他那五大卷《天体力学》里的级数，结果发现他所用到的级数幸好都是收敛的. 而同一个拉普拉斯，当有一次拿破仑问他为什么五大卷《天体力学》中没有一处提到上帝时，曾傲然答道："陛下，我不需要这样的假设！"

10.2 分析的算术化

柯西的工作在一定程度上澄清了微积分基础问题上长期存在的混乱，但他的理论还只能说是“比较严格”，人们不久便发现柯西的理论实际上也存在漏洞. 例如，他用了许多“无限趋近”、“想要多小就多小”等直觉描述的语言. 特别是，微积分计算是在实数舞台上进行的，但直到19世纪中叶，对于什么是实数，竟还没有明确的定义. 数学家们对实数系本身仍然是以直观的方式来理解的，他们相当随意地使用无理数(如$\sqrt{2}$)，而没有认真考察它们的确切意义和性质. 为了进行计算，他们依靠了这样的假设：任何无理数都能用有理数来任意逼近，如$\sqrt{2} = 1.4142\cdots$. 由于对实数系缺乏充分的理解，就不可能真正为微积分奠定牢固的基础. 例如，柯西在证明连续函数积分(作为和式的极限)的存在性、证明级数$\{S_n\}$收敛判别准则的充分性($|S_{n+r} - S_n|$对一切r和充分大的n都小于任意指定的量)以及证明中值定理$[f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0), \theta \in (0,1)]$时，都需要实数的完备性，而实数系的这种基本性质在当时并没有证实.

对实数系缺乏认识不仅造成逻辑上的间断，而且实际上常常导致错误. 由于没有建立一致收敛性概念，柯西得出过一个错误判断：若$u_n(x)(n = 1,2,\cdots)$皆连续，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = F(x)$收敛，则$F(x)$连续；他还断定这时对收敛级数可以逐项积分

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

另一个在当时普遍持有的错误观念是认为凡连续函数都是可微的. 因此，当德国数学家魏尔斯特拉斯在1861年举出一个处处连续但却处处不可微的函数例子时，数学界可以说是大为震惊. 魏尔斯特拉斯的例子是

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

其中 a 是奇数，$b \in (0,1)$ 为常数，使得 $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. 高斯曾经称"数学是眼睛的科学"，但是要看清魏尔斯特拉斯摆在数学家们面前的这条曲线，单靠一双好眼睛是无论如何不够的. 魏尔斯特拉斯的例子使人们迫切感到彻底摆脱对几何直觉的依赖，重新认识考察分析基础的必要性. 另一位德国数学家戴德金在 1858 年开始讲授微积分时说过的一段话，也反映出当时的数学家不满足于柯西的标准，而寻求使分析进一步严格化的途径的愿望：

"我比以往任何时候更加强烈地感到这种算法缺乏真正科学的基础. 在讨论一个变量逼近于一个固定的极限值的概念时，特别是在证明每个连续增加但不超过一切界限的量必定趋向于一个极限这一定理[①]时，我依靠的是几何上的证据. …… 但是，决不能认为以这种方式引入微分学是科学的. 这一点已经得到公认. 至于我本人，也无法克制这种不满意的感觉而下定决心研究这个问题，直到为无穷小分析原理建立纯粹算术的和完全严格的基础为止."

把分析建立在"纯粹算术"的基础之上，这方面的努力在 19 世纪后半叶酿成了数学史上著名的"分析算术化"运动，这场运动的主将是上面已经提到的魏尔斯特拉斯. 魏尔斯特拉斯认为实数赋予我们极限与连续性等概念，从而成为全部分析的本源. 要使分析严格化，首先就要使实数系本身严格化. 为此最可靠的办法是按照严密的推理将实数归结为整数(有理数). 这样，分析的所有概念便可由整数导出，使以往的漏洞和缺陷都能得以填补. 这就是所谓"分析算术化"纲领，魏尔斯特拉斯本人和他的学生们为实现这一纲领作出了艰苦的努力并获得了很大成功.

10.2.1 魏尔斯特拉斯

魏尔斯特拉斯(Karl Weierstrass, 1815—1897) 出生于德国威斯特伐里亚地区一个海关官员家庭，中学毕业时成绩优秀，共获 7 项奖，其中包括数学，但他的父亲却把他送到波恩大学去学习法律和商业. 魏尔

---

① 即每个单调有界数列 $\{a_n\}$ 都是收敛的. 这个定理与实数的完备性是等价的.

斯特拉斯对商业和法律都毫无兴趣.在波恩大学他把相当一部分时间花在自学他所喜欢的数学上,攻读了包括拉普拉斯的《天体力学》在内的一些名著.他在波恩的另一部分时间则花在了击剑上.魏尔斯特拉斯体魄魁伟,击剑时出手准确,加上旋风般的速度,很快就成为波恩人心目中的击剑名星.这样在波恩大学度过四年之后,魏尔斯特拉斯回到家里,没有得到他父亲所希望的法律博士学位,连硕士学位也没有得到.这使他父亲勃然大怒,呵斥他是一个"从躯壳到灵魂都患病的人".这时多亏他家的一位朋友建议,魏尔斯特拉斯被送到明斯特去准备教师资格考试.1841年,他正式通过了教师资格考试.在这期间,他的数学老师居德曼认识到他的才能.居德曼(C. Gudermann)是一位椭圆函数论专家,他的椭圆函数论给了魏尔斯特拉斯很大影响,魏尔斯特拉斯为通过教师资格考试而提交的一篇论文的主题就是求椭圆函数的幂级数展开.居德曼在这篇论文的评语中写道:"论文显示了一位难得的数学人才,只要不被埋没荒废,一定会对科学的进步作出贡献".

居德曼的评语并没有引起任何重视,魏尔斯特拉斯在获得中学教师资格后开始了漫长的中学教师生活.他在两处偏僻的地方中学度过了包括30岁到40岁的这段数学家的黄金岁月.他在中学不光是教数学,还教物理、德文、地理甚至体育和书法课,而所得薪金连进行科学通信的邮资都付不起.但魏尔斯特拉斯以惊人的毅力,过着一种双重的生活.他白天教课,晚上攻读研究阿贝尔等人的数学著作,并写了许多论文.其中有少数发表在当时德国中学发行的一种不定期刊物"教学简介"上,但正如魏尔斯特拉斯后来的学生、瑞典数学家米塔－列夫勒所说的那样:"没有人会到中学的教学简介中去寻找有划时代意义的数学论文."不过魏尔斯特拉斯这一段时间的业余研究,却奠定了他一生数学创造的基础.



图10.2 魏尔斯特拉斯

一直到1853年,魏尔斯特拉斯将一篇关于阿贝尔函数的论文寄给了德国数学家克雷

尔主办的《纯粹与应用数学杂志》(常常简称《数学杂志》),这才使他时来运转.克雷尔的杂志素以向有创造力的年青数学家开放而著称.阿贝尔的论文在受到柯西等名家冷落的情况下却被克雷尔杂志在1827年刊登出来;雅可比的椭圆函数论论文、格林的位势论论文等数学史上的重要文献,也都是在别处得不到发表而在克雷尔的帮助下用他的杂志发表的.这一次克雷尔又出场了.他接受了魏尔斯特拉斯的论文并在第二年就发表出来,随即引起了轰动.哥尼斯堡大学一位数学教授亲自到魏尔斯特拉斯当时任教的布伦斯堡中学向他颁发了哥尼斯堡大学博士学位证书.普鲁士教育部宣布晋升魏尔斯特拉斯,并给了他一年假期带职从事研究.此后,他再也没有回到布伦斯堡.1856年,也就是他当了15年中学教师之后,魏尔斯特拉斯被任命为柏林工业大学数学教授,同年被选进柏林科学院.他后来又转到柏林大学任教授直到去世,晚年享有很高的声誉,几乎被看成是德意志的民族英雄.

在数学史上,魏尔斯特拉斯关于分析严格化的贡献使他获得了“现代分析之父”的称号.这种严格化的突出表现是创造了一套ε-δ语言,用以重建分析体系.他批评柯西等前人采用的“无限地趋近”等说法具有明显的运动学涵义,代之以更精密的ε-δ表述,用这种方式重新定义了极限、连续、导数等分析基本概念,特别是通过引进以往被忽视的一致收敛性而消除了微积分中不断出现的各种异议和混乱.可以说,数学分析达到今天所具有的严密形式,本质上归功于魏尔斯特拉斯的工作.

10.2.2 实数理论

魏尔斯特拉斯很少正式发表自己的研究成果,他的许多思想和方法主要是通过他在柏林工业大学和柏林大学的课堂讲授而传播的,其中有一些后来由他的学生整理发表出来.在1857年开始的解析函数论课程中,魏尔斯特拉斯给出了第一个严格的实数定义,这个定义大意是先从自然数出发定义正有理数,然后通过无穷多个有理数的集合来定义实数.像大多数情况一样,魏尔斯特拉斯只是在课堂上作了讲授.1872年,有人曾建议他发表这一定义,但被魏尔斯特拉斯拒绝了.不

过,1872 年,戴德金、康托尔(G. Cantor,1845—1918)、梅雷(H. C. R. Meray) 和海涅(H. E. Heine) 等人几乎同时发表了他们各自的实数理论,而其中戴德金和康托尔的实数构造方法正是我们现在通常所采用的.

戴德金的方法也称为戴德金分割,是将一切有理数的集合 Q 划分为两个非空不相交的子集 A_1 和 A_2,使得 A_1 中的每一个元素小于 A_2 中的每一个元素,这时戴德金把这个划分定义为有理数的一个分割,记为(A_1,A_2).有些分割是有理数产生的,在这样的分割中,要么 A_1 有最大元素,要么 A_2 有最小元素.但有些分割却不是,例如,若 A_2 是由满足 $x^2>2$ 的一切正有理数 x 组成,A_1 是由一切其余的有理数组成,则既不存在 A_1 的最大元素,也不存在 A_2 的最小元素,因为不存在有理数 x 使得 $x^2=2$.戴德金说:每当我们考虑一个不是由有理数产生的分割 (A_1,A_2) 时,就得到一个新数即无理数 a,我们认为这个数是由分割 (A_1,A_2) 完全确定的.因此,戴德金就把一切实数组成的集合 R 定义为有理数集的一切分割,而一个实数 a 就是一个分割(A_1,A_2).

在这一定义中,由一个给定的有理数 r 产生的两个实质上等价的分割(视 r 是 A_1 的最大元素还是 A_2 的最小元素而定)被看成是同一的.

康托尔的基本思想则是把实数 a 定义为有理数序列$\{a_n\}$,这里 $\{a_n\}$ 必须是满足柯西收敛准则的基本序列,即当 $n\to\infty$ 时,$a_{n+v}-a_n$ 对任意正整数 v 一致地趋于0.康托尔把每个有理数基本序列与一个实数等同起来.而两个基本序列$\{a_n\}$ 与$\{b_n\}$,若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$,则被看成是等价的,即它们定义同一个实数.用现代语言说,康托尔的定义相当于把实数集合定义为有理数的基本序列的一切等价类的集合.如果 r 是一个有理数,则序列$\{r,r,r,\cdots\}$ 就表示对应于 r 的实数.

戴德金和康托尔在他们各自的实数定义下都严格证明了实数系的完备性.例如,康托尔证明了,若$\{b_n\}$ 是任一实数序列,又若对于任意正整数 μ 一致地有$\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+\mu}-b_n)=0$成立,则必存在唯一的一个实数 b,它被一个由有理数 a_n 构成的基本序列$\{a_n\}$ 所确定,使得

$$\lim_{n\to\infty}b_n=b.$$

这表明，由实数构成的基本序列不会产生任何更新类型的数，或者说由实数构成的基本序列不需要任何更新类型的数来充当它的极限，因为已经存在的实数已足够提供其极限了. 因此，从为基本序列提供极限的观点来说，实数系是一个完备系. 这样，长期以来围绕着实数概念的逻辑循环得以彻底消除. 实数的定义及其完备性的确立，标志着由魏尔斯特拉斯倡导的分析算术化运动大致宣告完成.

10.2.3　集合论的诞生

在分析的严格化过程中，一些基本概念如极限、实数、级数等的研究都涉及到由无穷多个元素组成的集合，特别是在对那些不连续函数进行分析时，需要对使函数不连续或使收敛问题变得很困难的点集进行研究，这样就导致了集合论的建立. 狄利克雷，黎曼等人都研究过这方面的问题，但只有康托尔在这一过程中系统发展了一般点集的理论，并开拓了一个全新的数学研究领域.

康托尔是在研究函数的三角级数表达式的唯一性问题时开始接触无穷点集的. 为了描述这种集合，他在 1872 年发表的《关于三角级数中一个定理的推广》这篇文章里，定义了一系列点集论的基本概念，如极限点、导集、二阶导集，……，第一型导集、第二型导集等，奠定了无穷点集论的初步基础. 在将唯一性定理推广到允许无穷例外点等的过程中，康托尔认识到，这些例外点的集合及其导集所产生的问题与全体实数集合的构造性质密切相关. 因此，康托尔开始关注这样一个问题：像自然数集那样的无穷集合和像实数集那样的无穷集合存在着怎样的关系?1873 年 11 月 29 日，康托尔在给戴德金的信中将上述问题以更明确的形式提了出来：全体正整数集合 N 和全体实数集合 R 能否建立一一对应?这个问题看起来似乎不成问题，因为 N 是离散的，R 是连



图 10.3　康托尔

续的，但康托尔认为这个问题也许并不那么简单，我们不能过分相信直觉.

导致康托尔作出这种判断的，是他不久前刚刚证明的一个结论：全体有理数的集合是可数的. 这很有些出乎意料，因为有理数不像自然数，它是稠密的，在任何两个不同的有理数之间都存在另一个有理数，事实上，有无限多个. 依靠直觉，似乎可以断言有理数是不可数的，但事实并非如此. 康托尔的证明如下（这里是他 1895 年给出的第二个证明）.

考虑正有理数按以下方式排成的阵列：

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & \cdots \\
\downarrow & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

在其中，第一行依大小次序包括所有以 1 为分母的正分数，即全体正整数；第二行依大小次序包括所有以 2 为分母的正分数；第三行依大小次序包括所有以 3 为分母的正分数等等. 显然，每个正有理数出现在这个阵列中. 如果我们按箭头所示依次重新排序，略去已经出现过的数，就得到全体正有理数的一个无穷序列 $\{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$，于是序列 $\{0, -r_1, r_1, -r_2, r_2, \cdots\}$ 就是包括所有有理数的集合. 这样就证明了有理数集的可数性.

更令人惊异的是，康托尔还证明全体实代数数的集合也是可数的，而在直觉上实代数数似乎要比有理数多得多. 康托尔起初想要证明实数集也是可数的，但他终于发现，在自然数集 **N** 和实数集 **R** 之间不可能建立一一对应. 康托尔的第一个证明是在 1873 年 12 月作出的，而以

"康托尔对角线法"著称的第二个证明则发表于1890年.在这第二个证明中,康托尔实际考虑的是实数集(0,1].

他的思路是,假定(0,1]是可数集,则必然存在(0,1]中所有实数的一个序列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$,现将每个这样的实数写成十进小数形式,并约定将有理数写成无穷小数,如

$$\frac{1}{2}=0.4999\cdots.$$

于是有:

$$\begin{aligned}
1 &\leftrightarrow a_1 = 0.p_{11}p_{12}p_{13}\cdots\\
2 &\leftrightarrow a_2 = 0.p_{21}p_{22}p_{23}\cdots\\
3 &\leftrightarrow a_3 = 0.p_{31}p_{32}p_{33}\cdots\\
&\vdots\\
k &\leftrightarrow a_k = 0.p_{k1}p_{k2}p_{k3}\cdots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

现构造 $b=0.b_1b_2b_3\cdots b_k\cdots$,并规定如果 $p_{kk}=1$,则 $b_k=9$,如果 $p_{kk}\neq 1$,则 $b_k=1$,因此 b 是(0,1]中的一个实数,但却不同于上面序列中的任何一个数.这就与假定相矛盾,因此(0,1]是不可数的.

康托尔关于实数不可数性的发现,是为建立超穷集合论而迈出的真正有意义的一步.之后,康托尔开始考虑在正整数和实数两个不同的无穷集合之外,是否还有更大的无穷?从1874年到1877年,他经过三年的探索,证明了 n 维空间的点集与线性点集是可以建立一一对应的.这个结论与直觉如此相悖,以致康托尔惊呼:"我见到了,但我不相信."当这个结果在1878年发表后,也引起了克罗内克(L. Kronecker,1823—1891)等人的激烈反对.正是在这篇文章中,康托尔明确提出了"基数"或"势"的概念:给定两个集合 M 和 N,如果能够根据某种规则在它们之间建立起一一对应的关系(即对于其中一集合的每个元素,另一集合中有且仅有一个元素与之对应),就称这两个集合有相同的"基数",或者说"等势".康托尔认为,建立集合论重要的是把数的概念从有穷数推广到无穷数.为此,他建立了超穷基数和超穷序数的理论.因为既然 n 维空间不能产生更大的无穷集合,进一步就要问能否从已知的

无穷集合出发根据确凿的数学运算来形成更大的无穷.康托尔先是在1883年的一篇文章里提出了良序集和序数的概念,并根据序数理论从序数集来形成更大的无穷.而后他又在1891年发表的“集合论的一个根本问题”里,利用一集合的幂集(即该集合所有子集的集合)来形成较原集合更大的无穷,并证明了著名的康托尔定理:一集合的幂集的基数较原集合的基数大.因此,从自然数集的基数(也是一切可数集的基数)出发,根据康托尔定理就得到了超穷基数一个无限上升的序列:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \cdots$$

这里$\aleph_0$表示自然数集的基数,$2^{\aleph_0}$表示其幂集的基数,等等.这样,康托尔就为我们展现了一幅壮丽的图景:无穷也具有无穷多的“层次”,并不存在一个最大的无穷.

可以证明,$2^{\aleph_0}$就是实数集的基数(也称连续统的基数),那么在自然数集基数与连续统基数之间是否还存在其他基数?上述序列是否穷尽了一切超穷基数呢?这就是著名的连续统假设和广义连续统假设,康托尔没有解决这个问题,后来希尔伯特把它列为他所提出的23个著名问题的第一个问题(见第11章).

10.3　分析的扩展

19世纪分析的严格化成为这个时代分析的特点,但是,加固基础的工作并没有妨碍19世纪的分析学家们去进一步拓广自己的领域.伴随着分析的严格化,分析中的一朵奇葩 —— 复变函数论成长壮大起来;与物理问题密切相关的微分方程继续成为数学家和物理学家共同关注的焦点;数学家们也开始更自觉地将分析工具应用于其他的数学分支,解析数论应运而生,概率论则为在20世纪的独立发展作好了准备(概率论的发展将在第11章中介绍).

10.3.1　复分析的建立

直到19世纪初,复数的“合法性”仍是一个未解决的问题,尽管如

此,18 世纪的数学家如达朗贝尔和欧拉等人在他们的工作中大量地使用复数和复变量,并由此发现了复函数的一些重要性质.例如,达朗贝尔在研究流体力学问题时,欧拉在用复函数计算实积分时,都得到了现在所称的柯西 - 黎曼方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

其中 u,v 分别是复变量 $z=x+\mathrm{i}y$ 的一个复函数的实部和虚部.他们的工作导致了分析技巧和函数概念的重要发展.然而不论是欧拉还是达朗贝尔都没有进一步研究复函数,在他们那里复函数并不是一个基本的实体,相反,他们是依靠把 $f(x+\mathrm{i}y)$ 的实部和虚部分开来进行其分析工作的.复分析真正作为现代分析的一个研究领域,是在 19 世纪建立起来的,主要奠基人是柯西、黎曼和魏尔斯特拉斯.三者的出发点和探讨方法有所不同,但却可以说殊途同归.

柯西在 1825 年出版的一本小册子《关于积分限为虚数的定积分的报告》可以看成是复分析发展史上的第一座里程碑.在其中他建立了我们现在所称的柯西积分定理.柯西本人对这个定理的叙述如下:

如果 $f(z)$ 对于 $x_0\leqslant x\leqslant X$ 和 $y_0\leqslant y\leqslant Y$ 是有穷的并且是连续的,$z=x+\mathrm{i}y$,并令 $x=\varphi(t)$,$y=\psi(t)$,其中 t 取实值,那么积分

$$\int_{x_0+\mathrm{i}y_0}^{X+\mathrm{i}Y}f(z)\mathrm{d}z$$

的值与函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的形式无关,也就是说与积分路径无关.

柯西借助于变分方法证明上述积分定理,其中要求函数 $f(z)$ 的导数存在并连续,然而他在定理的陈述中却没有提到这一条件.柯西接下去考虑了 $f(z)$ 在矩形区域内部或边界上成为无穷的情形.这时沿着两条不同路径的积分的值一般是不同的.他在各种假设下计算了它们之间的差.例如 $f(z)$ 只在位于两条积分路径之间的一点 $z_0=a+\mathrm{i}b$ 处成为无穷,并且以下极限

$$F=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

存在,即 f 在 z_0 有一个单极点,他证明积分之间的差是 $\pm 2\pi\mathrm{i}F$.柯西在 1826 年的一篇论文中称量 F 本身为积分留数.另外柯西还指出,当一

个函数在两条积分路径之间有几个极点时，积分之差必须取留数之和。从 1826 年起，柯西发表了一系列有关留数计算的文章，并给出了留数的新的表达式。

柯西的积分理论是复分析的开山利斧，通过它可以导出与复函数的解析性相关的一系列本质结果。不过柯西本人当时并未深察其工作的复分析意义。直到 1846 年，他所关心的中心问题还是实积分及其值的计算。柯西观点的转变是发生在 1846 年，他在这一年发表的两篇文章中把与路径无关的基本定理和留数定理分别推广到了任意闭曲线的情形。到 1850 年前后，柯西已开始认识到他的工作作为复变函数基本结果的重要性。

也就在这个时候，黎曼以题为《单复变函数一般理论基础》(1851)的论文在哥廷根大学获得博士学位。正如著名数学家阿尔福斯(L. V. Ahlfors)所说，这篇论文不仅包含了现代复变函数论主要部分的萌芽，而且开启了拓扑学的系统研究，革新了代数几何，并为黎曼自己的微分几何研究铺平了道路。

就复变函数论而言，黎曼的论文以导数的存在性作为复函数概念的基础："复变量 w 称为另一个变量的函数，如果其变化使得导数$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$的值与 $\mathrm{d}z$ 的值无关"。黎曼这里所说的"函数"即现代意义的解析函数。黎曼在论文中证明了在一区域内函数 $w = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 是变量 $z = x + \mathrm{i}y$ 的解析函数的充分必要条件是实函数u，v 在该区域内连续可微，且满足方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

如前所述，此方程早先已由欧拉、达朗贝尔等人引入，柯西在 1814 年讨论二重积分换序问题时也导出了同样的方程，并指出这两个方程"包含了由实到虚过渡的全部理论"。但只有黎曼才真正使这对方程成为复分析大厦的基石。黎曼的研究揭示出复函数与实函数之间的深刻区别。他的导数定义要求$\frac{\Delta w}{\Delta z}$的极限必须对于$z + \Delta z$ 趋向于z 的一切途径都相同，这一条件事实上保证了在区域内具有一阶导数的函数同时具有一

切高阶导数，而在实函数情形，即使一阶导数对所有的方向都存在，也不能保证高阶导数的存在.

黎曼这篇论文一个突出的特征是其中的几何观点.正是在这里，黎曼引入了一个全新的几何概念，即黎曼曲面.引入这种曲面的出发点在于对多值函数进行研究.黎曼面可以看作是由一些互相适当连接的重叠的平面构成.例如考察函数 $w^2 = z$，对于每个 z 值，一般有 w 的两个值与之对应.为了研究这个函数并保持两个值集 $\sqrt{z}$ 和 $-\sqrt{z}$（或者说函数 $w^2 = z$ 的两个分支）分开，黎曼给每个分支引进一个 z 值平面，还在每个平面上引进一个点对应于 $z = \infty$，将这两个平面看成是一个位于另一个的上方，它们在两个分支给出相同 w 值的那些 z 值处，即 $z = 0$ 和 $z = \infty$ 处连接起来.这样 $w^2 = z$ 的这两个平面（或称叶）就构成了黎曼面.因此，当 z 在黎曼面上变动时，w 就变为 z 的一个单值函数.虽然黎曼面是一个几何概念，但它远非是直观的，我们也不可能在三维空间里准确地表示出黎曼面，为此，黎曼的观点还遭遇到了一些同时代人的反对.例如魏尔斯特拉斯就称黎曼面不过是一种"几何幻想物".

魏尔斯特拉斯本人为复变函数论开辟了又一条研究途径.魏尔斯特拉斯的工作一向以严格著称，这一点我们在上一节已经领略到了.同样，他关于解析函数的工作也是以追求绝对的严格性为特征的.因此，魏尔斯特拉斯不仅拒绝使用柯西通过复积分所获得的结果（包括柯西积分定理和留数理论），他也不能接受黎曼提出的那种几何"超验"方法.他相信函数论的原理必须建立在代数真理的基础上，所以他把目光投向了幂级数，用幂级数定义函数在一点邻域内的解析性，并演出整个解析函数理论.

用幂级数表示已用解析形式给出的复函数，这并不完全是一个新的创造.但是，从已知的一个在限定区域内定义某个函数的幂级数出发，根据幂级数的有关定理，推导出在其他区域中定义同一函数的另一些幂级数，这个问题是魏尔斯特拉斯解决的.上述过程也称为解析开拓，它在魏尔斯特拉斯的理论中起着基本的作用.使用这种方法，已知某个解析函数在一点处的幂级数，通过解析开拓，我们就可以完全得到这个解析函数.

在 19 世纪末，魏尔斯特拉斯的方法占据了主导地位，正是这种影响，使得“函数论”成为复变函数论的同义词．但是后来柯西和黎曼的思想被融合在一起，其严密性也得到了改进，而魏尔斯特拉斯的思想也逐渐能从柯西－黎曼观点推导出来．这样，上述三种传统便得到了统一．

10.3.2　解析数论的形成

19 世纪分析方法的一个重要应用领域是数论．事实上，欧拉在数论中已引进了分析方法．我们在第 7 章中已介绍过的欧拉恒等式．

$$\prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

就是算术基本定理的解析等价形式，它揭示了素数 p 和自然数 n 之间的积性关系．欧拉还提出了母函数法，利用幂级数来进行整数分拆．然而欧拉在数论中对分析方法的应用是十分有限的．

解析数论作为有意识地使用分析方法研究数论问题的一门分支是从狄利克雷开始的．1837 年，狄利克雷利用分析方法证明了欧拉和勒让德早先提出的一个猜想：每一个算术序列

$$a, a+b, a+2b, a+3b, \cdots, a+nb, \cdots$$

中都有无穷多个素数，其中 a 和 b 是互素的．在证明中，狄利克雷引入了后来以他的名字命名的 L 函数

$$L(s)=L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},$$

其中 s 是复变数，χ 称为狄利克雷（剩余）特征标．此后，狄利克雷 L 函数成为研究数论问题的重要工具．

不过促使解析数论取得长足进展的重要因素是关于素数分布问题的研究．以 $\pi(x)$ 表示不超过 x 素数的个数．欧拉、勒让德、高斯都曾推测

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}=1,$$

但他们都未能给予证明．这就是著名的素数定理．最先在这方面作出贡献的是俄国数学家切比雪夫．他在 1850 年证明了当 x 充分大时，不等式

$$A_1<\frac{\pi(x)}{x/\log x}<A_2$$

成立,其中 $0.922 < A_1 < 1$, $1 < A_2 < 1.105$.

这个问题也引起了黎曼的兴趣.他在 1859 年发表的"论不大于一个给定值的素数个数"的文章中,将欧拉恒等式的右边记作 $\zeta(s)$,并且把 s 看成复变数,于是就产生了我们今天所说的黎曼 ζ 函数:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

黎曼认为,素数性质可以通过复变函数 $\zeta(s)$ 来探讨,他还建立了与 $\zeta(s)$ 的零点有关的表示 $\pi(x)$ 的公式.因此,研究素数分布的关键在于研究 $\zeta(s)$ 的性质.这样,黎曼就开创了解析数论的新时期,并使复分析成为这一领域的重要工具.在这篇文章中,黎曼还提出一个猜想:$\zeta(s)$ 在带形区域 $0 \leqslant \mathrm{Re}s \leqslant 1$ 中的一切零点都位于 $\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}$ 这条线上,其中 $\mathrm{Re}s$ 表示复变数s 的实部.这就是著名的黎曼猜想,它至今未获解决.

1896 年,阿达马(J. Hadamard) 和瓦莱·普桑(C. de la Vallée Poussin) 根据黎曼的方法和结果,应用整函数理论,终于证明了素数定理,从此解析数论开始得到迅速发展,并成为 20 世纪最为活跃的数论分支之一.

10.3.3 数学物理与微分方程

自从牛顿时代起,物理问题就成为数学发展的一个重要源泉.18 世纪数学和物理的结合点主要是常微分方程.随着物理科学所研究的现象从力学向电学以及电磁学扩展,到 19 世纪,偏微分方程的求解成为数学家和物理学家关注的重心,对它们的研究促进了函数论、变分法、无穷级数、常微分方程、代数、微分几何等学科的发展.

19世纪偏微分方程发展的序幕,是由法国数学家傅里叶(J. Fourier, 1768—1830) 拉开的,他于 1822 年发表的《热的解析理论》是数学史上的经典文献之一.傅里叶研究的主要问题是吸热或放热物体内部任何点处的温度随空间和时间的变化规律.在对物体的物理性状作出一定的限制(如均匀,各向同性)后,他根据物理原理推导出了三维空间的热传导方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = k^2 \frac{\partial T}{\partial t},$$

其中 k 是一个常数，其值依赖于物体的质料．傅里叶当时解决的是如下特殊的热传导问题：设所考虑的物体为两端保持在温度 0 度、面绝热而无热流通过的柱轴，在此情形下求解上述热传导方程．因为柱轴只涉及一维空间，所以这个问题也就是解偏微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k^2 \dfrac{\partial T}{\partial t}, \\ T(0,t) = 0, T(l,t) = 0, t > 0, \\ T(x,0) = f(x), 0 < x < l. \end{cases}$$

其中下面的两项分别是边界条件和初始条件．傅里叶为解这个方程用了变量分离法，他得到

$$T(x,t) = \sum_{n-1}^{\infty} b_n e^{-(n^2\pi^2/k^2 l^2)t} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

为了满足初始条件，必须有

$$f(x) = \sum_{n-1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

这就促使傅里叶不得不考虑任给一个函数，能否将它表示成三角级数的问题．傅里叶得出的结论是：每个函数都可以表示成

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad 0 < x < \pi.$$

这样，每个 b_n 就可由上式乘以 $\sin nx$ $(n = 1,2,\cdots)$，再从 0 到 π 积分而得到．他还指出这个程序可以应用于表达式

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

接着，他考虑了任何 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 的表达式，利用任何函数可以表示成一个奇函数和一个偶函数之和这一事实，傅里叶可以将区间 $(-\pi,\pi)$ 上的任何 $f(x)$ 表示为

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其系数由

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\ n \geqslant 1$$

确定,这就是我们通常所称的傅里叶级数.为了处理无穷区域的热传导问题,傅立叶同时还导出了现在所称的"傅里叶积分":

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)dt.$$

需要指出的是,傅里叶从没有对"任意"函数可以展成傅里叶级数这一断言给出过任何完全的证明,他也没有说出一个函数可以展开为三角级数必须满足的条件.我们前面曾提到,康托尔等人正是从这里着手他们的研究的.然而傅里叶本人对此却充满信心,因为他的信念有几何上的根据.傅里叶的工作不仅发展了偏微分方程的理论,而且使函数概念得以改进,同时也标志着人们从解析函数或可展成泰勒级数的函数中解放了出来.傅里叶的前辈都曾坚持一个函数必须是可用单个式子表示的,而傅里叶级数却可以表示那些在区间$(0,\pi)$或$(-\pi,\pi)$的不同部分有不同解析式的函数,不论这些表示式互相是否连续地接合着.特别是一个傅里叶级数是在一整段区间上表示一个函数的,而一个泰勒级数仅在函数是解析的点附近表示该函数.

事实上,傅里叶的主要思想早在1807年他提交给巴黎科学院的一篇关于热传导的论文中就已出现了,但是这篇论文在拉格朗日等人评审后遭到拒绝.1811年,他又提交了经过修改的论文,以争取科学院为热传导问题所设立的高额奖金.这次他虽然获了奖,但仍因受到缺乏严密性的批评而未能将论文发表在当时科学院的《报告》里.1824年,傅里叶成为科学院的秘书,这回他终于能够把他1811年的论文原封不动地发表在《报告》里,而这已经是在他的名著《热的解析理论》出版两年以后的事情了.

19世纪偏微分方程的另一个重要发展是围绕着位势方程来进行的,这方面的代表人物格林(G. Green,1793—1841)是一位磨坊工出身、自学成才的英国数学家.位势方程也称拉普拉斯方程(参见第7章):

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

拉普拉斯曾采用球面调和函数法解这个方程，不过他得到一个错误的结论，认为这个方程当被吸引的点(x,y,z)位于物体内部时也成立。这个错误由泊松(S.-D. Poisson,1781—1840)加以更正。泊松指出，如果点(x,y,z)在吸引体内部，则满足方程$\Delta V=-4\pi\rho$，其中ρ是吸引体密度，它也是x,y,z的一个函数。拉普拉斯和泊松的方法都只适用于特殊的几何形体，格林则认识到函数V的重要性，并首先赋予它"位势"(potential)的名称，与前人不同的是，格林发展了函数V的一般理论。他求解位势方程的方法与用特殊函数的级数的方法相反，称为奇异点方法。他在1828年私人印刷出版的小册子《关于数学分析应用于电磁学理论的一篇论文》中，建立了许多对于推动位势论的进一步发展极为关键的定理与概念，其中以格林公式

$$\iiint(U\Delta V-V\Delta U)\mathrm{d}v=\iint\left(V\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial V}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma$$

(n为物体表面指向内部的法向，$\mathrm{d}v$是体积元，$\mathrm{d}\sigma$是面积元)和作为一种带奇异性的特殊位势的格林函数概念影响最为深远。

格林是剑桥数学物理学派的开山祖师，他的工作培育了汤姆逊(W. Thomson,1824—1907)、斯托克斯(G. Stokes,1819—1903)、麦克斯韦(J. C. Maxwell,1831—1879)等强有力的后继者，他们是19世纪典型的数学物理学家。他们的主要目标，是发展求解重要物理问题的一般数学方法，而他们手中的主要武器就是偏微分方程，以致于在19世纪，偏微分方程几乎变成了数学物理的同义语。

剑桥数学物理学派的贡献使经历了一个多世纪沉寂后的英国数学在19世纪得以复兴，麦克斯韦1864年导出的电磁场方程

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon\boldsymbol{E})}{\partial t},$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu\boldsymbol{H})}{\partial t},$$

$$\mathrm{div}\,\varepsilon\boldsymbol{E}=\rho,$$

$$\mathrm{div}\,\mu\boldsymbol{H}=0$$

是19世纪数学物理最壮观的胜利，正是根据对这组方程的研究，麦克斯韦预言了电磁波的存在，不仅给科学和技术带来巨大的冲击，同时也使偏微分方程威名大振。爱因斯坦在一次纪念麦克斯韦的演讲中说：

"偏微分方程进入理论物理学时是婢女,但逐渐变成了主妇,"他认为这是从19世纪开始的,而剑桥数学物理学派尤其是麦克斯韦在这一转变中起了重要的作用.

除了麦克斯韦方程,19世纪导出的著名偏微分方程组还有粘性流体运动的纳维－斯托克斯方程(C.-L.-M.-H. Navier,1821;G. Stokes,1849)和弹性介质的柯西方程(1828)等.所有这些方程都不存在普遍解法.不过19世纪的数学家们已逐渐认识到在偏微分方程的情形,无论是单个方程还是方程组,通解实际上不如初始条件和边界条件已给定的特殊问题的解有用.因此他们在求解定解问题方面做了大量工作.

对18、19世纪建立起来的类型众多的微分方程,数学家们求显式解的努力往往归于失败,这种情况促使他们转而证明解的存在性.最先考虑微分方程解的存在性问题的数学家是柯西.他指出:在求显式解无效的场合常常可以证明解的存在性.他在1820年代对形如 $y' = f(x,y)$ 的常微分方程给出了第一个存在性定理,这方面的工作被德国数学家李普希茨(R. Lipschitz)、法国数学家刘维尔(J. Liouville)和皮卡(C. E. Picard)等追随.柯西也是讨论偏微分方程解的存在性的第一人,他在1848年的一系列论文中论述了如何将任意阶数大于1的偏微分方程化为偏微分方程组,然后讨论了偏微分方程组的存在性并提出了证明存在性的长函数方法.柯西的工作后来被俄国女数学家柯瓦列夫斯卡娅(С. В. Ковалевская,1850—1891)独立地发展为包括拟线性方程和高阶组在内的非常一般的形式.柯瓦列夫斯卡娅的论文《偏微分方程理论》刊登在克雷尔《数学杂志》上(1875),有关的偏微分方程解的存在唯一性定理在现代文献中就称"柯西－柯瓦列夫斯卡娅定理".

柯瓦列夫斯卡娅是历史上为数不多的杰出女数学家之一.她出生于莫斯科一个贵族家庭,17岁时就在彼得堡一位海军学校教师指导下掌握了微积分.然而当时的俄国大学拒收女性,为了求学深造,她只好出走德国,先在海德堡大学学习一年,后来慕名到柏林求见魏尔斯特拉斯.初次见面,魏尔斯特拉斯出了一堆难题考她,估计她多半做不出来,但一周以后,当柯瓦列夫斯卡娅如期带着完满的答卷回来见他时,这位名重一时的数学家对她的数学才能不再怀疑.当时的柏林大学跟俄国

大学一样不收女生，魏尔斯特拉斯决定为柯瓦列夫斯卡娅单独授课，每星期日下午一次，四年不曾中断.在这四年时间里，柯瓦列夫斯卡娅不仅学完了大学的全部数学课程，而且还写出了三篇重要论文，其中一篇就是前面提到的关于偏微分方程解的存在性的研究.这些工作是那样出色，以致哥廷根大学在没有经过考试和答辩的情况下破格授予她博士学位，使她成为历史上第一位女数学博士.柯瓦列夫斯卡娅 38 岁时由于对刚体绕定点旋转问题的研究而荣获法国科学院大奖——鲍亭奖.刚体旋转问题自欧拉、拉格朗日以来长期停滞不前，法国科学院已三次悬赏解决.柯瓦列夫斯卡娅的获奖成为当时的报纸新闻，轰动了巴黎.法国科学院院长亲自致颁奖辞说："当今最辉煌、最难得的荣誉桂冠，有一顶将落到一位女士头上."第二年，俄国科学院选举柯瓦列夫斯卡娅为通信院士，为此还专门修改了院章中不接纳女性院士的规定.柯瓦列夫斯卡娅又成为历史上第一位女科学院院士，她达到了事业的顶峰.不幸的是，一年多以后，她就因患肺炎在瑞典斯德哥尔摩逝世，年仅 41 岁.



图 10.4　柯瓦列夫斯卡娅

由于 18 世纪的大量开发，常微分方程的求解在 19 世纪反而局限于用分离变量法解偏微分方程时所得到的方程，并且多半使用级数解，这引导出一串特殊函数，如贝塞尔函数(1816)、高斯超几何函数(1812)等等.在 19 世纪后半叶，对常微分方程研究的理论方面变得突出，并且在两个大的方向上开拓了常微分方程研究的新局面，其中的重大发展都与庞加莱的名字联系着.

第一个方向是与奇点问题相联系的常微分方程解析理论.作为常微分方程向复数域的推广，常微分方程解析理论是由柯西开创的，但柯西之后，解析理论重点向大范围转移.黎曼和福克斯(L. Fuchs，1833—1902)发展了线性方程理论，福克斯与庞加莱探讨了一阶非线性方程理论，到庞加莱与克莱因的自守函数理论而臻于顶峰.自守函数

是在二阶非线性方程研究中,考虑当绕奇点的闭路径一圈时解的变换而导出的.一般自守函数是指在变换群

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

或该群的某些子群作用下不变的函数,首先由庞加莱作为二阶常微分方程两个线性无关解的商的反函数而得到.庞加莱在1824—1884年间的一系列论文中建立了这类函数的一般理论,克莱因也差不多同时独立发现了自守函数.自守函数的研究完整地解决了代数系数 n 阶线性常微分方程的积分问题,同时作为椭圆函数的推广,自守函数本身已成为解析函数论的重要内容.

19世纪常微分方程研究的另一个崭新方向——定性理论,则完全是庞加莱的独创.我们知道,当求显式解变得越来越困难时,人们的目光就更多地转向通过微分方程本身来了解其解的性态的问题.庞加莱则是由三体问题的研究而被引导到常微分方程定性理论的创立.三体问题自牛顿以来一直在天体力学里占有突出的地位,其中一个备受关注的课题是行星或卫星轨道的稳定性,这导致对描述天体运动的微分方程周期解的研究.拉格朗日曾找到三体问题的特殊周期解.但在一般情况下,描述三体问题的非线性常微方程组很难找到显式解.庞加莱1881—1886年间在同一标题《由微分方程定义的曲线》(Memoire sur les courbes definies par une equation différentiellt)下发表的4篇论文,寻求只通过考察微分方程本身就可以回答关于稳定性等问题的方法,创建了微分方程定性理论,庞加莱从形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

的非线性方程出发,发现微分方程的奇点(即使 P 和 Q 同时为0的点)起着关键作用.他把奇点分为四类(焦点、鞍点、结点、中心),讨论了解在各种奇点附近的性状,同时还发现了一些与描述满足微分方程的解曲线有关的重要的闭曲线如无接触环(不与任何满足微分方程的曲线组相接触的闭曲线)、极限环(满足微分方程的闭曲线,且其他解曲线无限趋近却永远达不到它)等.利用这些概念,庞加莱获得了关于三体问

题周期解的许多新结果. 庞加莱关于在奇点附近积分曲线随时间变化的定性研究在 1892 年以后被俄国数学家李亚普诺夫(A. M. Ляпунов, 1857—1918) 发展到高维一般情形而形成专门的"运动稳定性" 分支.

庞加莱(Henri Poincaré, 1854—1912) 从 1881 年(27 岁) 起任巴黎大学教授, 直到他去世. 他是欧拉、柯西之后最多产的数学家, 并且在研究领域的广泛方面很少有人能与他相比. 每年他在索邦(Sorbonne, 即巴黎大学) 讲授一种不同的科目, 而在每一门科目中, 他都留有他自己的创造印记.



图 10.5 庞加莱

庞加莱、克莱因和希尔伯特, 是在 19 和 20 世纪数学交界线上高耸着的三个巨大身影. 他们反射着 19 世纪数学的光辉, 同时照耀着通往 20 世纪数学的道路. 在 19 世纪末, 数学发展呈现出一派生机蓬勃的景象, 这与 18 世纪形成了鲜明的对比. 无论从内部需要还是外部应用看, 数学家们似乎都有做不完的问题. 1900 年 8 月 5 日, 庞加莱宣布巴黎国际数学家大会开幕, 正是在这次会议期间, 希尔伯特充满信心地走上讲台, 以他著名的 23 个问题揭开了 20 世纪数学的序幕.

20 世纪数学概观(Ⅰ) 纯粹数学的主要趋势

11

科学知识的增长是非线性的过程. 在 19 世纪变革与积累的基础上,20 世纪数学呈现出指数式的飞速发展. 现代数学不再仅仅是代数、几何、分析等经典学科的集合,而已成为分支众多的、庞大的知识体系,并且仍在继续急剧地变化发展之中. 大体说来,数学核心领域(即核心数学,也称纯粹数学)的扩张,数学的空前广泛的应用,以及计算机与数学的相互影响,形成了现代数学研究活动的三大方面. 下面我们将按这三大方面来概括介绍 20 世纪数学的发展. 本章叙说纯粹数学的主要趋势;第 12 章阐述应用数学的发展和计算机的影响,最后在第 13 章中选讲一些有代表性的成就来进一步说明 20 世纪数学的特征.

纯粹数学是 19 世纪的遗产,在 20 世纪得到了巨大的发展. 20 世纪纯粹数学的前沿不断挺进,产生出令人惊异的成就. 与 19 世纪相比,20 世纪纯粹数学的发展表现出如下主要的特征或趋势:

① 更高的抽象性;

② 更强的统一性;

③ 更深入的基础探讨.

本章对 20 世纪纯粹数学的论述,将以这三项特征为线索.

11.1 新世纪的序幕

1900 年 8 月,德国数学家希尔伯特在巴黎国际数学家大会上作了

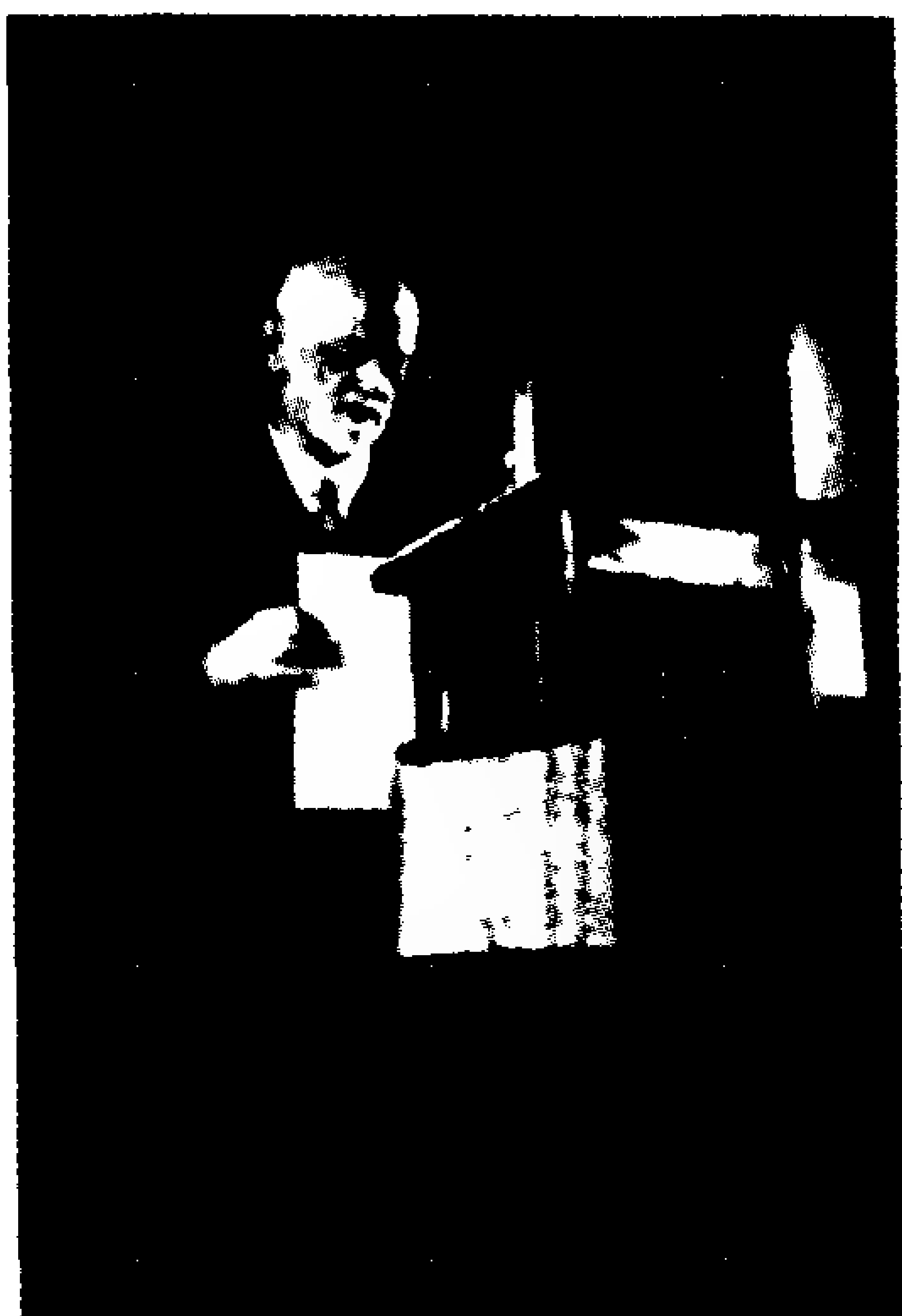


图 11.1　希尔伯特

题为《数学问题》的著名讲演.他的讲演是这样开始的:

“我们当中有谁不想揭开未来的帷幕,看一看今后的世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢?我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标?在广阔而丰富的数学思想领域,新世纪将会带来什么样的新方法和新成果?”

希尔伯特在讲演的前言和结束语中,对各类数学问题的意义、源泉及研究方法发表了许多精辟的见解,而整个演说的主体,则是他根据19世纪数学研究的成果和发展趋势而提出的23个数学问题,这些问题涉及现代数学的许多重要领域.一个世纪以来,这些问题一直激发着数学家们浓厚的研究兴趣.

以下是希尔伯特的数学问题及解决简况:

1.连续统假设.自然数(可数)集基数$\aleph_0$与实数集(连续统)基数$C = 2^{\aleph_0}$之间不存在中间基数.1963年,美国数学家柯恩(P.Cohen)证明了:连续统假设的真伪不可能在策梅洛 - 弗兰克尔公理系统内判别.

2. 算术公理的相容性. 1931 年,哥德尔(K. Gödel) 证明了希尔伯特关于算术公理相容性的"元数学" 纲领不可能实现. 相容性问题至今未决.

3. 两等底等高四面体体积之相等. 1900 年德恩(M. Dehn) 证明了确实存在着等底等高却不剖分相等,甚至也不拼补相等的四面体. 第三问题成为最先获解的希尔伯特问题.

4. 直线为两点间的最短距离. 问题提得过于一般.

5. 不要定义群的函数的可微性假设的李群概念. 格利森(A. M. Gleason)、蒙哥马利(D. Montgomery)、席平(L. Zippin) 等于 1952 年对此问题给出了肯定解答.

6. 物理公理的数学处理. 在量子力学、热力学等部门,公理化已取得很大成功. 至于概率论公理化已由科尔莫戈罗夫(A. H. Колмогоров) 等建立(1933).

7. 某些数的无理性与超越性. 1934 年,盖尔丰德(A. O. Гельфонд) 和施奈德(T. Schneider) 各自独立地解决了问题的后半部分. 即对于任意代数数 $\alpha \neq 0,1$ 和任意代数无理数 β 证明了 α^{β} 的超越性.

8. 素数问题. 包括黎曼猜想,哥德巴赫猜想和孪生素数猜想,均未解决.

9. 任意数域中最一般的互反律之证明. 已由高木贞治(Takagi Teiji, 1921) 和阿廷(E. Artin, 1927) 解决.

10. 丢番图方程可解性判别. 1970 年, 马蒂雅舍维奇(Ю. В. Матиясевич) 证明了,不存在判定任一给定丢番图方程有无整数解的一般算法.

11. 系数为任意代数数的二次型. 哈塞(H. Hasse, 1929) 和西格尔(C. L. Siegel, 1936, 1951) 在此问题上获得重要结果.

12. 阿贝尔域上的克罗内克定理在任意代数有理域上的推广. 尚未解决.

13. 不可能用仅有两个变数的函数解一般的七次方程. 连续函数情形 1957 年已由阿诺(В. И. Арнольд) 解决.

14. 证明某类完全函数系的有限性. 1958 年被永田雅宜否定解决.

15. 舒伯特计数演算的严格基础. 代数几何的严格基础已由范德瓦尔登(B. L. Van der Waerden, 1938—1940) 和韦依(A. Weil, 1950) 建立,但舒伯特(H. C. H. Schubert) 演算的合理性尚待解决.

16. 代数曲线与曲面的拓扑. 有很多重要结果.

17. 正定形式的平方表示. 已由阿廷于1926年解决.

18. 由全等多面体构造空间. 部分解决.

19. 正则变分问题的解是否一定解析. 1904年伯恩斯坦证明了一个变元的解析非线性椭圆型方程其解必定解析. 该结果后又被推广到多变元椭圆组.

20. 一般边值问题. 成果丰富.

21. 具有给定单值群的微分方程的存在性. 长期以来人们一直认为普莱梅依(J. Plemelj)1908年已对此问题作出肯定解答. 但八十年后发现普莱梅依的证明有漏洞. 1989年前苏联数学家A. A. 鲍里布鲁克关于此问题举出了反例,使第二十一问题最终被否定解决.

22. 解析关系的单值化. 一个变数情形已由寇贝(P. Koebe) 解决.

23. 变分问题的进一步发展.

我们看到,希尔伯特问题中近一半已经解决或基本解决. 有些问题虽未最后解决,但也取得了重要进展. 希尔伯特问题的解决与研究,大大推动了数理逻辑、几何基础、李群论、数学物理、概率论、数论、函数论、代数几何、常微分方程、偏微分方程、黎曼曲面论、变分法等一系列数学分支的发展,有些问题的研究(如第二问题和第十问题) 还促进了现代计算机理论的成长. 重要的问题历来是推动科学前进的杠杆,但一位科学家如此自觉、如此集中地提出一整批问题,并如此持久地影响了一门科学的发展,这在科学史上是不多见的. 当然任何科学家都会受到当时科学发展的水平及其个人的科学素养、研究兴趣和思想方法等限制. 希尔伯特问题未能包括拓扑学、微分几何等在20世纪成为前沿学科的领域中的数学问题,除数学物理外很少涉及应用数学,等等. 20世纪数学的发展,远远超出了希尔伯特问题所预示的范围.

11.2 更高的抽象

更高的抽象化是20世纪纯粹数学的主要趋势或特征之一.这种趋势,最初主要是受到了两大因素的推动,即集合论观点的渗透和公理化方法的运用.

(1) 集合论观点.19世纪末由G.康托尔所创立的集合论,最初遭到许多数学家(包括克罗内克、克莱因和庞加莱等)的反对,但到20世纪初,这一新的理论在数学中的作用越来越明显,集合概念本身被抽象化了,在弗雷歇等人的著作(如《关于泛函演算若干问题》,1906)中集合已不必是数集或点集,而可以是任意性质的元素集合,如函数的集合,曲线的集合等等.这就使集合论能够作为一种普遍的语言而进入数学的不同领域,同时引起了数学中基本概念(如积分、函数、空间等等)的深刻变革.

(2) 公理化方法.H.外尔曾说过:"20世纪数学的一个十分突出的方面是公理化方法所起的作用极度增长,以前公理方法仅仅用来阐明我们所建立的理论的基础,而现在它却成为具体数学研究的工具."

现代公理化方法的奠基人是D.希尔伯特.我们已经知道,虽然欧几里得已用公理化方法总结了古代的几何知识,但他的公理系统是不完备的.希尔伯特在1899年发表的《几何基础》中则提出第一个完备的公理系统.与以往相比,希尔伯特公理化方法具有两个本质的飞跃.

首先是希尔伯特在几何对象上达到了更深刻的抽象.欧几里得几何对所讨论的几何对象(点、线、面等)都给以描述性定义,而希尔伯特发现点、线、面的具体定义本身在数学上并不重要,它们之所以成为讨论的中心,仅仅是由于它们与所选择的公理的关系.因此希尔伯特的公理体系虽然也是从"点、线、面"这些术语开始,但它们都是纯粹抽象的对象,没有特定的具体内容.正如希尔伯特本人曾形象地解释的那样:不论是管这些对象叫点、线、面,还是叫桌子、椅子、啤酒杯,它们都可以成为这样的几何对象,对于它们而言,公理所表述的关系都成立.这就赋予了公理系统的最大的一般性,当赋予这些抽象对象以具体内容时,

就形成各种特殊的理论.

其次,希尔伯特考察了各公理间的相互关系,明确提出了对公理系统的基本逻辑要求,即:① 相容性,② 独立性,③ 完备性.由于上述的特点,希尔伯特的公理化方法不仅使几何学具备了严密的逻辑基础,而且逐步渗透到数学的其他领域,成为组织、综合数学知识并推动具体数学研究的强有力的工具.

集合论观点与公理化方法在 20 世纪逐渐成为数学抽象的范式,它们相互结合将数学的发展引向了高度抽象的道路.这方面的发展,导致了 20 世纪上半叶实变函数论、泛函分析、拓扑学和抽象代数等具有标志性的四大抽象分支的崛兴(11.2.1 ~ 11.2.4).这四大分支所创造的抽象语言、结构及方法,又渗透到数论、微分方程论、微分几何、代数几何、复变函数论及概率论等经典学科,推动它们在抽象的基础上革新提高、演化发展(11.2.5 先以概率论为典型例子说明这种发展).

11.2.1 勒贝格积分与实变函数论

集合论的观点在 20 世纪初首先引起了积分学的变革,从而导致了实变函数论的建立.

19 世纪末,分析的严格化迫使许多数学家认真考虑所谓“病态函数”,特别是不连续函数,如狄利克雷函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

和不可微函数,如魏尔斯特拉斯函数,并研究这样一个问题:积分的概念可以怎样推广到更广泛的函数类(如某种间断函数)上去.这方面首先获得成功的是法国数学家勒贝格(H. Lebesgue,1875—1941).他在 1902 年发表的《积分,长度与面积》(博士论文)中利用以集合论为基础的“测度”概念建立了所谓“勒贝格积分”.与柯西和黎曼的积分概念不同,勒贝格将函数



图 11.2 勒贝格

$y = f(x)$ 在区间$[a,b]$上的值的下确界(A)与上确界(B)之间的线段分成 n 个小区间 $y_0y_1, y_1y_2, \cdots, y_{n-1}y_n$，其中 $y_0 = A, y_n = B$ (图 11.3)，对每一个这样的分割作"勒贝格积分和"：$S = y_0\mu e_0 + y_1\mu e_1 + \cdots + y_n\mu e_n$，其中 μe_i 表示满足$y_i \leqslant f(x) < y_{i+1}$ 的所有的点 x 的集合(e_i)的"测度". 当 $\max|y_{i+1} - y_i| \to 0$ 时，勒贝格积分和 S 的极限就定义为"勒贝格积分"(对于$[a,b]$上所谓"有界可测函数"f，勒贝格证明 S 的极限一定存在.)

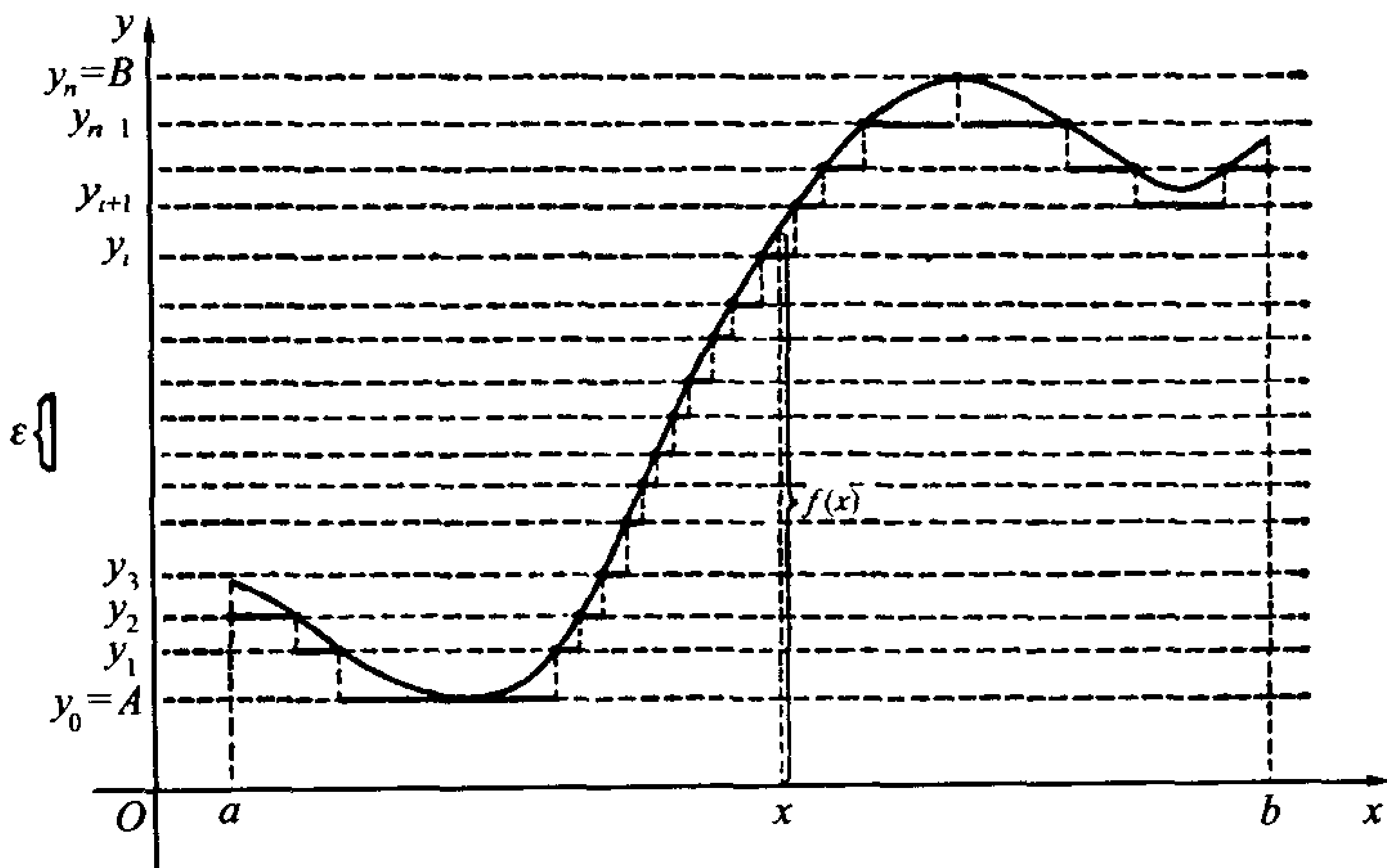


图 11.3 勒贝格积分

这里"测度"概念是通常的"长度"概念对任意集合情况的推广. 按照集合论，直线上一个开集可以表示成一列开区间的和，这列开区间长度之和就是该开集的测度. 闭集可以看作是开集关于某区间的余集，因此，闭集的测度定义为区间长与开集测度的差. 直线上任意一点集 E，若用开集 G 包起来，则认为 E 的测度小于G 的测度，这种外包集可以有很多，它们的测度的下确界叫 E 的"外测度"；同样，用闭集 F 从E 的内部填E，把所有内填闭集 F 的测度的上确界叫E 的"内测度". 一个集合 E 如果内外测度相等，则称 E 有测度，或称"可测集". 测度论最先是由勒贝格的老师博雷尔(E. Borel, 1871—1956)创立的，勒贝格将其应用于新的积分论. 勒贝格积分使一些原先在黎曼意义下不可积的函数

按勒贝格的意义变得可积. 在勒贝格积分的基础上可以进一步推广导数等其他微积分基本概念,并重建微积分基本定理(微分运算与积分运算的互逆性)等微积分的基本事实. 从而形成了一门新的数学分支——实变函数论. 实变函数论是普通微积分的推广,它使微积分的适用范围大大扩展,引起数学分析的深刻变化. 而勒贝格积分正是这门学科的中心概念,因此勒贝格积分理论可以说是 20 世纪数学开门红的重大贡献之一,但这项理论在刚开始也像集合论等新生事物一样遭到了许多反对. 当时就连像埃尔米特这样的大数学家(庞加莱的老师,证明了 e 的超越性),都毫不掩饰他对研究病态函数的反感,他在一封信中写道:"我怀着惊恐的心情对不可导函数的令人痛惜的祸害感到厌恶." 勒贝格回忆他的积分理论公布后,他在人们心目中"成了没有导数的函数的人",无论他参加哪里的讨论会,总是有人对他说:"这里不会使您感兴趣,我们在讨论有导数的函数". 勒贝格从 1902 年发表论文起差不多 10 年内在巴黎找不到职位,直到 1910 年才获准进入巴黎大学,1921 年起任法兰西学院教授,这时他已 46 岁. 不用说,勒贝格积分今天已获得广泛的承认,不只是数学家,工程师、物理学家们也普遍运用抽象积分理论来处理他们无法回避的病态函数. 勒贝格积分可以看作是现代分析的开端. 作为分水岭,人们往往把勒贝格以前的分析学称为经典分析,而把以由勒贝格积分引出的实变函数论为基础而开拓出来的分析学称为现代分析. 这个现代分析的另一大支柱,是在 20 世纪前三十年间形成的泛函分析.

11.2.2　泛函分析

我们在讲变分法时实际上已接触到"泛函" 这个概念,变分法的典型问题是求积分

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的极值,其中 $y=y(x)$ 本身是一个可变函数,这样 $J(y)$ 就可以看作是"函数的函数"(对每一个函数 y 有一个 $J(y)$ 值相对应),也就是所谓"泛函". 关于泛函的抽象理论在 19 世纪末 20 世纪初首先由意大利数

学家伏尔泰拉(V. Volterra)和法国数学家阿达马在变分法的研究中开创."泛函"这个名称就是由阿达马首先采用的,伏尔泰拉称之为线函数,即曲线的函数.

泛函分析的另一个来源是积分方程(未知函数在积分号下的方程)理论.19世纪末,瑞典数学家弗雷德霍姆(I. Fredholm)创造了一种优美的方法来处理某类特殊的积分方程(现称弗雷德霍姆方程),这个方法揭示了积分方程与线性代数方程组之间的相似性,从而可将积分方程看成是线性代数方程组的极限情形.但弗雷德霍姆未能实现无穷多个代数方程的极限过程,这一步是由希尔伯特完成的.希尔伯特在1904—1910年发表了6篇论文(后收载在他的《线性积分方程一般理论原理》一书中,1912),通过严密的极限过程将有限线性代数方程组的结果有效地类比推广到积分方程.正是在这一过程中,他引进了无穷实数组

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}\text{(简记为}\{a_n\}\text{或 }a\text{)}$$

的全体组成的集合(后记为 l^2)(其中任一数组诸分量的平方和 $\sum_{i=1}^{\infty} a_n^2$ 都是有限数),并在任意两数组 $\{a_n\} = a$ 和 $\{b_n\} = b$ 间定义了一种叫做内积的运算,用 (a, b) 表示:

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$$

这样一个无穷集合 l^2,就构成后来所说的"希尔伯特空间",也是历史上第一个具体的无穷维空间.希尔伯特本人当时只是把它当作研究积分方程论的工具,并没有意识到它的革命性意义,而且也没有使用几何语言.希尔伯特之后,他的学生施密特(E. Schimidt)以及冯·诺依曼等人进一步研究无穷数组集合(平方可和)l^2,将每个无穷组 $\{a_n\}$ 看作是一个"点",并经过深入的几何类比,正式确定了希尔伯特空间的概念.在这种类比推广中,"内积"概念扮演了关键角色(因此希尔伯特空间通常也叫"内积空间"):如果将无穷数组 $a = \{a_n\}$ 看成是一个有无穷多个坐标 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 的"向量",引进记号 $\| a \|$ 表示数量

$$\sqrt{(a,a)}=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2}\ ,$$

这显然是三维空间中向量长度的推广.同样像三维空间一样,两个向量 a,b 称为"正交"(即相互垂直),如果它们的内积 $(a,b)=0$.特别是,施密特等还考虑了一系列彼此不同的向量 $(e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots)$,假定其中任意两个不同向量都正交,并且每个向量的长度都等于 1.这样的一系列向量被称为"标准正交系",它们是直角坐标系的无穷维类似物.

以后数学家们又发现了其他无穷维希尔伯特空间的例子,特别是 1907 年匈牙利数学家里斯(F. Riesz) 和德国数学家费舍尔(E. Fischer) 几乎同时建立了全体在区间 $[a,b]$ 上平方(勒贝格) 可积函数 $f(x)$ 的集合 $[L^2(a,b)]$ 与平方可积数组 l^2 之间的等价(一一对应) 关系,该结果叫里斯 - 费舍尔定理,它使一个平方可积函数 f 可以看作是无穷维空间 $[L^2(a,b)]$ 中的一个点.粗略地说,泛函分析就是在这种抽象函数空间上的微积分.

从观念上来说,泛函分析的建立体现了 20 世纪在集合论影响下空间和函数这两个基本概念的进一步变革."空间" 现在被理解为某类元素的集合,这些元素按习惯被称作"点"(虽然它们可以是任意的抽象对象),它们之间受到某种关系的约束,这些关系被称之为空间的结构.简言之,"空间" 仅仅是具有某种结构的集合,而"函数" 的概念则被推广为两个空间(包括一个空间到它自身) 之间的元素对应(映射) 关系.其中将函数映为实数(或复数) 的对应关系就是通常所称的"泛函".空间与函数概念的这种崭新的理解,在法国数学家弗雷歇(M. Fréchet, 1878—1973)1906 年发表的论文《关于泛函演算若干问题》(博士论文) 中已有明确的阐述.弗雷歇在将普通的微积分演算推广到函数空间方面做了大量先驱性工作,因此,弗雷歇是本世纪抽象泛函分析理论的奠基人之一.

抽象空间理论与泛函分析在 20 世纪上半叶有了巨大的发展,1922 年波兰数学家巴拿赫(S. Banach,1892—1945) 提出了比希尔伯特空间更一般的赋范空间(后称巴拿赫空间) 概念,用与角度概念无关的"范数" 替代内积而定义距离及收敛性,极大地拓广了泛函分析的疆域.巴

拿赫还建立了巴拿赫空间上的线性算子理论,证明了一批后来成为泛函分析基础的重要定理.巴拿赫无疑也是现代泛函分析的奠基人.

广义函数论的建立是20世纪泛函分析发展中的又一重大事件.长期以来,科学家们一直为一类奇怪的函数所困扰,狄拉克函数是这类函数的一个典型例子:

$$\delta(x)=0\ (x\neq 0),\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1.$$

这类函数在物理学中应用广泛,但按已有的数学概念却不能理解.1945年,法国数学家施瓦茨(L. Schwartz)将这些函数解释为函数空间上的连续线性泛函即广义函数,使它们有了严格的数学基础.广义函数标志着函数概念发展史上的一个新阶段.施瓦茨称广义函数为"分布"(distribution),因此广义函数论也叫"分布论".在施瓦茨之前,原苏联数学家索伯列夫(С. Л. Соболев,1908—1989)在偏微分方程研究中实际上已引入了广义函数(1936).盖尔范德(И. М. Гельфанд)对广义函数论的发展也有重大贡献.

泛函分析有力地推动了其他分析分支的发展,使整个分析领域的面貌发生了巨大变化.泛函分析的观点与方法还广泛渗透到其他科学与工程技术领域.

11.2.3 抽象代数

在20世纪公理化方法向各个数学领域渗透的过程中,抽象代数的形成与发展占有特殊的地位.

在19世纪,代数学的对象已突破了数(包括用符号表示的数)的范畴,这种突破是由伽罗瓦群的概念开始的.在伽罗瓦之后,群的概念本身进一步发展,除了有限的、离散的群,又出现了无限群、连续群等.代数对象的扩张,在19世纪还沿着其他途径进行,先后产生了许多其他的代数系统,例如,我们已提到过的四元数与超复数、域、理想等.19世纪数学家还引进了环(戴德金,1871.克罗内克也研究过环并称之为"order",希尔伯特首先使用了"ring"即环这个名称)和格(戴德金,1897)等.

然而所有这些概念起先都是以具体的形式出现和被定义的.伽罗瓦的群只是有限置换群;克莱因的无限群也是各种具体的变换群.同样,戴德金和克罗内克引进的域也都是具体的代数数域.这些具体的代数系统各自有着不同的来源,基本上是相互独立地被研究着而没有统一的基础.随着研究的深入,人们逐渐认识到这些代数系统中元素本身的内容并不重要,重要的是关联这些元素的运算(如乘法、加法)及其所服从的规则(如分配律、交换律等),于是便开始了舍弃元素的具体内容从具体代数系统向抽象代数系统的过渡.这方面早期的探索者有:凯莱,他在1849—1854年间首先指出群可以是一个普遍的概念,不必局限于置换群,从而引进了(有限)抽象群;弗罗贝尼乌斯(F.G. Frobenius,1849—1917),他从1895年开始发展了研究抽象群的有力工具——群表示论;韦伯(H. Weber,1842—1913),他在1893年提出了域的抽象理论,等等.但所有这些抽象化尝试都是局部的和不彻底的.代数学中公理化方法的系统运用是在希尔伯特关于几何基础的工作出现之后.20世纪初,亨廷顿(E. V. Huntington)与狄克森(L. E. Dickson)给出了抽象群的公理系统(1902,1905);斯坦尼兹(E. Steinitz)继承了韦伯的路线对抽象域展开了综合研究(《域的代数理论》,1911);韦德玻恩(J.H.M. Wedderburn)则发展了线性结合代数(《论超复数》,1907)等等.特别是到了1920年代,在希尔伯特直接影响下的诺特(Emmy Noether,1882—1935)及其学派的工作,最终确立了公理化方法在代数领域的统治地位.

通常将诺特1921年发表的《环中的理想论》看作是现代抽象代数的开端.在这篇仅40多页的论文中,诺特用公理化方法发展了一般理想论,奠定了抽象交换环理论的基础.由于对概念的准确的抽象及表述,使诺特的理论带有令人惊叹的一般性.《环中的理想论》成为抽象交换代数的典范.诺特下一项重大贡献则是以新的统一的纯粹概念的方式,利用弗罗贝尼乌斯、狄克森、韦德玻恩与其他人几十年积累起来的成果,逐步地建立了非交换代数及其表示理论.诺特1932年与布饶尔、哈塞合作证明的所谓“代数主定理”,被外尔称为是代数发展史上的一个重大转折.

爱米·诺特是迄今为止最伟大的女数学家(在她之前,数学史上的女数学家有:古希腊的希帕蒂娅;近代意大利的阿涅西[Maria Agnesi,1718—1799,发现阿涅西箕舌线 $x^2y = a^2(a - y)$];法国的热尔曼[S. Germain,1776—1831,她对费马大定理的研究曾受到高斯的赞许];俄国的柯瓦列夫斯卡娅等),她出生于一个数学家族,父亲马克斯·诺特(Max Noether)是爱尔朗根大学数学教授,对代数几何有卓越贡献.弟弟弗里茨·诺特(Fritz Noether)是一位应用数学家.诺特本人早年师从有“不变量之王”之称的戈丹(P. Gordan).当她还默默无闻呆在爱尔朗根的时候,希尔伯特却在她发表的关于连续群不变式论的论文中找到了发展广义相对论的数学工具,于是便把她调到了哥廷根.但诺特在哥廷根却很长时间里连一个讲师的位置都没有得到,原因是当时的德国大学,评议会里大多数成员都仍然不赞成妇女出任讲师和教授,虽有希尔伯特、克莱因



图 11.4　E. 诺特和她的学派(1932):
E. 维特(左一),P. 伯奈斯(左二),H. 外尔(左四),
E. 阿廷(左六),E. 诺特(左七),曾炯之(右坐者)

大力支持，也未能说服哥廷根大学的评议会改变决定.一直到 1919 年诺特才取得讲师资格，1922 年成为副教授，薪金也很微薄.1933 年在希特勒排犹运动中被迫移居美国，先后在普林斯顿高等研究院和布林莫尔学院任教.1935 年因肿瘤手术去世，爱因斯坦还特地为她写了悼念文章.诺特外貌不扬，H.外尔称"美神没有光顾她的摇蓝"，但她温存宽厚，淡泊名利，始终全身心关注科学研究事业.她在哥廷根虽然直到被迫离去时都没有教授头衔，但主要是由于她的研究工作和教学活动，哥廷根成为 20 世纪 20 年代和 30 年代前期抽象代数的中心，吸引了世界各地的学者，这其中有阿廷(E. Artin)，布饶尔(R. Brauer)、哈塞(H. Hasse)、来自荷兰的范德瓦尔登(B. L. Van der Waerden)、来自美国的麦克莱恩(S. MacLane)，还有中国学者曾炯之和日本学者正田建次郎等.形成了哥廷根抽象代数学派.诺特在表述自己思想方面并不擅长，她的思想与方法，主要由范德瓦尔登概括与总结，写成专著，这就是 1930—1931 年间出版的二卷本《近世代数学》.这部用透彻的公理化形式组织的抽象代数著作的问世，使抽象代数在很长时间内成为数学家们关注的热点.

抽象代数使代数结构成为代数学研究的中心.代数结构是由集合以及集合元素之间的一个或几个二元合成运算组成.这里关键之处在于:① 集合的元素是抽象的，不事先赋予具体涵义;② 运算是通过公理来规定的.正因为如此，抽象代数的研究具有极大的一般性并能演绎出无比丰富的内容.

代数结构的研究对现代数学的发展影响深远.法国布尔巴基学派①正是受抽象代数思想的启示提出了一般的数学结构观点，范德瓦尔登的《近世代数学》是他们工作的第一个范本.除了代数结构，布尔巴基还明确了另外两类结构——"拓扑结构"和"序结构"，并将它们与

① 布尔巴基(Nicolas Bourbaki)是集体笔名，布尔巴基学派 1935 年由 H.嘉当、A.韦依和迪厄多内(J. A. Dieudonné)等一群年青法国数学家创建.学派成员每年不定期集会，形成了著名的"布尔巴基讨论班".学派组织保密，成员新老交替，50 岁退出.布尔巴基学派的宗旨是用结构的观点来综合、概括现代数学的各个分支，代表作《数学原本》(Elements de mathematique)1939 年出版第 1 卷，以后每一、二年出一卷，形成巨型丛书，是 20 世纪数学史上令人瞩目的事件.

代数结构合称为“母结构”. 以这三类结构为基础,通过它们的交叉、结合而产生出各种层次的新结构. 布尔巴基学派认为,数学就是“数学结构的仓库”. 结构的观点可以说是公理化方法更上一层楼,它导致了对数学中更一般的抽象结构的研究, 如 1945 年麦克莱恩和艾伦伯格(S. Eilenberg) 提出的“范畴”(category) 结构等,已成为在数学中起统一作用的概念.

11.2.4 拓扑学

拓扑学研究几何图形的连续性质,即在连续变形下保持不变的性质(允许拉伸、扭曲,但不能割断和粘合). 拓扑学思想的萌芽可以追溯到欧拉的哥尼斯堡七桥问题(1736, 如图 11.5, 要求设计一条散步路线,使河上每桥走过一次且只过一次)、地图四色问题(1852) 等问题的研究. 高斯也研究过一些与拓扑学有关的问题(如在他关于代数基本定理的第一个证明中), 他们均称这类问题为“位置几何”(Geometriam Situs). “拓扑学” 这一术语则是高斯的学生李斯廷(J. B. Listing) 首先引用的(1847), 源于希腊文 τοποϛ(位置、形势) 与 λογοϛ(学问). 但拓扑学本质上是属于 20 世纪的抽象学科. 庞加莱 1895—1905 年间在同一主题《位置分析》下发表的一组论文,开创了现代拓扑学研究. 庞加莱将几何图形剖分成有限个相互连接的基本片,并用代数组合的方法研究其性质. 用这样的观点加以研究的拓扑学叫做组合拓扑学. 庞加莱定义了高维流形、同胚、同调,引进了一系列拓扑不变量,首次建立了庞加莱对偶定理,

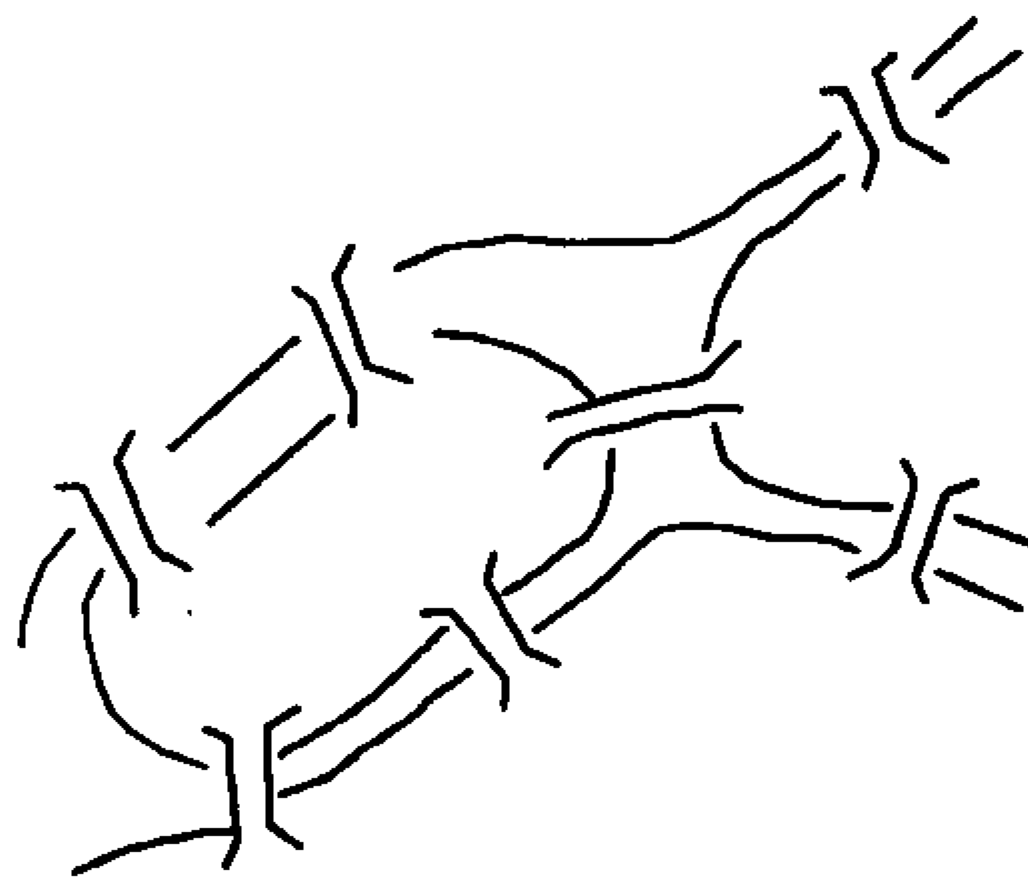


图 11.5 哥尼斯堡七桥

提出了庞加莱猜想,等等.总之,组合拓扑学在庞加莱手中奠定了基础.

1926年,E.诺特首先洞察到群论在组合拓扑学研究中的重要意义.在她的影响下,霍普夫(H.Hopf)1928年定义了同调群,1940年左右,科尔莫戈罗夫和亚历山大(J.W.Alexander)又定义了上同调群.我们知道,由庞加莱首先提出的同调(homology)概念刻画了定向图形的边缘关系,同调群(包括与之对偶的上同调群)的引进就将拓扑问题转化为抽象代数问题.同调论提供了拓扑学中易于计算的、常用的不变量.从拓扑到代数过渡的另一条途径是同伦(homotopy)理论,是与流形之间的连续映射的连续变形有关的研究.同伦论的奠基人是波兰数学家胡勒维茨(W.Hurewicz),他在1935—1936年间引进了n维同伦群概念.同调论与同伦论一起推动组合拓扑学逐步演变成主要利用抽象代数方法的代数拓扑学.1942年,美国数学家莱夫谢茨(S.Lefschetz)《代数拓扑学》一书的出版,标志着代数拓扑学这一分支学科的正式形成.同调论与同伦论,始终是这一学科的两大支柱.

在采取组合与代数观点的同时,数学家们早就认识到点集论也是连续性研究中的基本途径,从而建立了所谓"点集拓扑学"或"一般拓扑学".弗雷歇1906年关于抽象空间的研究中已经包含了点集拓扑学的一些基本观念.1941年德国数学家豪斯多夫(F.Hausdorff)发表的《集合论基础》,以"邻域"概念出发,定义抽象的拓扑空间,并引进连续、同胚、连通、维数等一系列概念,标志着点集拓扑学的正式诞生.随后波兰学派和前苏联学派对拓扑空间的性质(紧致性、可分性、连通性等)进行了深入考察.20世纪30年代中期起,法国布尔巴基(Bourbaki)学派的系统研究更使一般拓扑学趋于成熟,成为第二次世界大战后数学的基础学科.

11.2.5　公理化概率论

概率论的公理化,是20世纪数学抽象化的又一大硕果,它使这门古老的学科焕发出无限的青春,在理论和应用两方面都进入了崭新的发展阶段.

(一)20世纪以前的概率论

概率论起源于博奕问题.15—16世纪意大利数学家帕乔利(L. Pacioli)、塔塔利亚和卡尔丹的著作中曾讨论过"如果两人赌博提前结束,该如何分配赌金"等概率问题.1654年左右,费马与帕斯卡在一系列通信中讨论类似的合理分配赌金问题,并用组合方法给出正确解答.他们的通信引起了荷兰数学家惠更斯的兴趣,后者在1657年发表的《论赌博中的计算》是最早的概率论著作.这些数学家的著述中所出现的第一批概率论概念(如数学期望)与定理(如概率加法、乘法定理),标志着概率论的诞生.但他们主要是以代数方法计算概率.一般认为,概率论作为一门独立数学分支,其真正的奠基人是雅各布·伯努利,他在遗著《猜测术》(Ars Conjectandi,1713)中首次提出了后来以"伯努利定理"著称的极限定理:若在一系列独立试验中,事件 A 发生的概率为常数且等于 p,那么对 $\forall \varepsilon > 0$ 以及充分大的试验次数 n,有

$$P\left\{\left|\left(\frac{m}{n} - p\right)\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \eta \quad (\eta \text{ 为任意小正数}),$$

其中 m 为 n 次试验中事件 A 出现的次数.伯努利定理刻画了大量经验观测中呈现的稳定性,作为大数定律的最早形式而在概率论发展史上占有重要地位.

伯努利之后,棣莫弗(A. De Moivre,1667—1754)、蒲丰(G.-L. L. Buffon,1707—1788)、拉普拉斯、高斯和泊松等对概率论作出了进一步的奠基性贡献.其中棣莫弗(1733)和高斯(1809)各自独立引进了正态分布;蒲丰提出了投针问题和几何概率(1777);泊松陈述了泊松大数定律(1837),等等.特别是拉普拉斯1812年出版的《概率的分析理论》(Théorie analytique des probabilités),以强有力的分析工具处理概率论的基本内容,使以往零散的结果系统化.拉普拉斯的著作实现了从组合技巧向分析方法的过渡,开辟了概率论发展的新时期.正是在这部著作中,拉普拉斯给出了概率的古典定义:

事件 A 的概率 $P(A)$ 等于一次试验中有利于事件 A 的可能的结果数与该试验中所有可能的结果数之比.

19世纪后期,极限理论的发展成为概率论研究的中心课题,俄国

数学家切比雪夫(П. Л. Чебышев, 1821—1894) 在这方面作出了重要贡献. 他在 1866 年建立了关于独立随机变量序列的大数定律,使伯努利定理和泊松大数定律成为其特例. 切比雪夫还将棣莫弗－拉普拉斯极限定理推广为更一般的中心极限定理. 切比雪夫的成果后又被他的学生马尔可夫(A. A. Марков, 1856—1922) 等发扬光大,影响了 20 世纪概率论发展的进程.

19 世纪末,概率论在统计物理等领域的应用提出了对概率论基本概念与原理进行解释的需要. 另外,科学家们在这一时期发现的一些概率论悖论也揭示出古典概率论中基本概念存在的矛盾与含糊之处,其中最著名的是所谓"贝特朗悖论",1899 年由法国学者贝特朗(J. Bertrand) 提出:

在半径为 r 的圆内随机选择弦,计算弦长超过圆内接正三角形边长的概率. 根据"随机选择" 的不同意义,可以得到不同的答案.

(1) 考虑与某确定方向平行的弦, 则所求概率为 $\frac{1}{2}$[如图 11.6(i)];

(2) 考虑从圆上某固定点 P 引出的弦, 则所求概率为 $\frac{1}{3}$[如图 11.6(ii)];

(3) 随机的意义理解为:弦的中点落在圆的某个部分的概率与该部分的面积成正比,则所求概率为 $\frac{1}{4}$[如图 11.6(iii),长度大于内接正

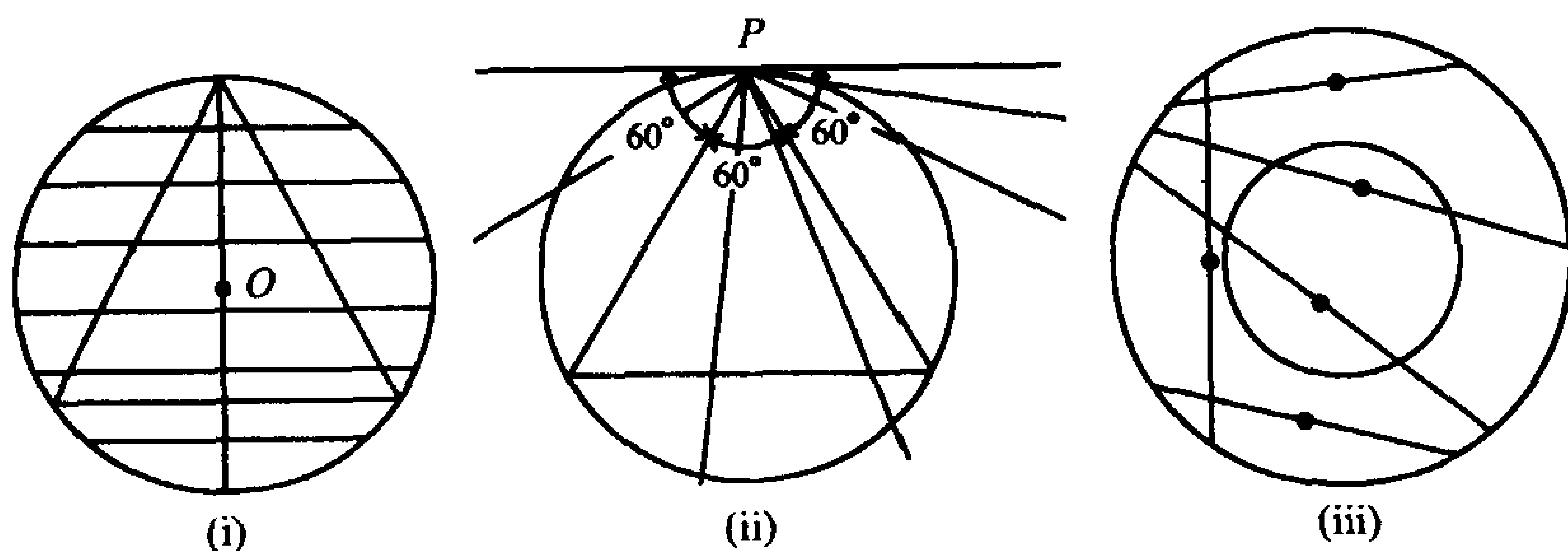


图 11.6

三角形边长的弦的中点皆落在半径为$\frac{r}{2}$的同心圆内,故所求概率应为$\pi(\frac{r}{2})^2\Big/\pi r^2=\frac{1}{4}$.]

这类悖论说明概率的概念是以某种确定的实验为前提的,这种实验有时由问题本身所明确规定,有时则不然.因此,贝特朗等悖论的矛头直指概率概念本身,特别地,拉普拉斯的古典概率定义开始受到猛烈批评.

这样,到19世纪末,无论是概率论的实际应用还是其自身发展,都强烈地要求对概率论的逻辑基础作出更加严格的考察.

(二)酝酿与准备

最早对概率论严格化进行尝试的,是俄国数学家伯恩斯坦(C.H. Бернштейн,1880—1968)和奥地利数学家冯·米西斯(R. von Mises, 1883—1953).他们都提出了一些公理来作为概率论的前提,但他们的公理理论都是不完善的.真正严格的公理化概率论只有在测度论与实变函数理论的基础上才可能建立.事实上,对概率论基本概念的分析越来越揭示出这些概念与测度论及度量函数中基本概念之间的深刻相似性,使数学家们看到了一条建立概率论逻辑基础的正确道路.

这方面的先行者是法国数学家博雷尔.作为测度论的奠基人,博雷尔早在1905年就指出概率论理论如果采用测度论术语来表述将会方便许多,并首先将测度论方法引入概率论重要问题的研究.特别是1909年他提出并在特殊情形下解决了随机变量序列$\xi_1,\xi_2,\cdots$,服从强大数定律的条件问题.博雷尔的工作激起了数学家们沿这一崭新方向的一系列探索,其中尤以原苏联数学家科尔莫戈罗夫(A.H. Колмогоров,1903—1987)等的研究最为卓著.科尔莫戈罗夫在1926年推导了弱大数定律成立的充分必要条件,后又对博雷尔提出的强大数定律问题给出了最一般的结果.在所有这些研究中,与可测函数论的类比起着极重要的作用.大数定律是概率论的中心课题之一,它的解决标志着测度论与可测函数论在概率论研究中的有力渗透,成为以测度论为基础的概率论公理化的前奏.

(三) 科尔莫戈罗夫公理化

从 1920 年代中期起,科尔莫戈罗夫开始从测度论途径探讨整个概率论理论的严格表述,其结果是 1933 年以德文出版的经典性著作《概率论基础》(Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitsrechnung). 科尔莫戈罗夫是莫斯科函数论学派领导人鲁金(H. H. Дузин,1883—1950)的学生,对实变函数论的运用可以说是炉火纯青. 他在这部著作中建立起集合测度与事件概率的类比、积分与数学期望的类比、函数正交性与随机变量独立性的类比 ……,等等. 这种广泛的类比终于赋予了概率论以演绎数学的特征.

科尔莫戈罗夫公理化概率论中的第一个基本概念,是所谓"基本事件集合". 假设进行某种试验,这种试验在理论上应该允许任意次重复进行,每次试验都有一定的、依赖于机会的结果. 所有可能结果的总体形成一个集合(空间)E,就称之为基本事件集合. 对于概率论的逻辑展开而言,集合 E 的元素是抽象的、非具体的,正如公理化几何学中的点、线、面等一样.

E 的任意子集,即由可能的结果事件组成的任意集合,被称为随机事件. 并不是所有的随机事件都被考虑, 而只考虑一定的事件域(field). 我们知道,概率论只处理那些在某种意义上发生频率稳定的事件. 在科尔莫戈罗夫的公理化理论中,对于域中的每一个事件,都有一个确定的非负实数与之对应,这个数就叫做该事件的概率. 在这里,概率的定义同样是抽象的,并不涉及频率或其他任何有具体背景的概念.

科尔莫戈罗夫提出了 6 条公理,整个概率论大厦可以从这 6 条公理出发建筑起来. 科尔莫戈罗夫的公理系逐渐获得了数学家们的普遍承认. 由于公理化,概率论成为一门严格的演绎科学,取得了与其他数学分支同等的地位,并通过集合论与其他数学分支密切地联系着.

科尔莫戈罗夫是 20 世纪最杰出的数学家之一,是俄国十月革命以后成长起来的数学家中的卓越代表. 在鲁金之后,科尔莫戈罗夫成为莫斯科数学学派中占突出地位的领头人物. 概率论无疑是他科学生涯中最重要的成就,但科尔莫戈罗夫的贡献却远不止于此,还涉及函数论与

调和分析、拓扑学、动力系统、微分方程、泛函分析、射影几何、流体力学、自动控制、信息论、数理统计及数理逻辑等.他关于这些领域的论文大都短小精悍,带有开创或奠基性质.科尔莫戈罗夫对数学史和数学哲学也表现出浓厚的兴趣并发表过许多脍炙人口的论述.作为出色的教育家,他培养的青年数学家仅成为苏联科学院院士或通信院士的就有6位(包括泛函分析学家 И.М.盖尔范德等).科尔莫戈罗夫还亲自给中学生讲课,并领导组织了全苏数学奥林匹克竞赛.科尔莫戈罗夫是英、美、法等12个国家科学院的名誉院士,并多次获得国际大奖.但他本人很少关心名誉、头衔和金钱,1965年,他把得到的国际巴桑奖金全数捐赠给学校图书馆;1980年他荣获沃尔夫奖,却没有前去领取奖金.



图11.7 科尔莫戈罗夫

(四)公理化以后的概率论

在公理化基础上,现代概率论取得了一系列理论突破.

公理化概率论首先使随机过程的研究获得了新的起点.随机过程作为随时间变化的偶然量的数学模型,是现代概率论研究的重要主题.一类普遍的随机过程叫做马尔可夫过程,这是一种无后效性随机过程,即在已知当前状态的情况下,过程的未来状态与其过去状态无关.原始形式的马尔可夫过程——马尔可夫链最早由马尔可夫提出(1907),故名.1931年,科尔莫戈罗夫用分析的方法奠定了马尔可夫过程的理论基础.科尔莫戈罗夫之后,在随机过程研究中作出重大贡献而影响了整个现代概率论的重要代表人物有莱维(P. Levy,1886—1971)、辛钦(А.Я. Хинчин,1894—1959)、杜布(J. L. Doob)和伊藤清等.

莱维从1938年开始创立研究随机过程的新方法,即着眼于轨道性质的概率方法.1948年出版《随机过程与布朗运动》,提出了独立增量过程的一般理论,并以其为基础极大地推进了对作为一类特殊马尔可夫过程的布朗运动的研究.

自然界中许多随机现象表现出某种平稳性,统计特性不随时间的推移而变化的随机过程叫做平稳过程,平稳过程的相关理论是1934年由辛钦提出的.

另一类有重要意义的随机过程是"鞅",布朗运动也是其特例.莱维在1935年已有鞅的思想,1939年维尔(J. Ville)引进"鞅"(martingale)这个名称,但鞅论的奠基人是美国概率论学派的代表人物杜布.杜布从1950年开始对鞅概念进行了系统的研究而使鞅论成为一门独立的分支.鞅论使随机过程的研究进一步抽象化,不仅丰富了概率论的内容,而且为其他数学分支如调和分析、复变函数、位势理论等提供了有力的工具.

从1942年开始,日本数学家伊藤清引进了随机积分与随机微分方程,开辟了随机过程研究的新道路.

像任何一门公理化的数学分支一样,概率论公理化一旦完成,就允许各种具体的解释.概率论的公理化是将概率概念从频率解释抽象出来,同时又总可以从形式系统再回到现实世界.概率论的应用范围被大大拓广了.

11.3 数学的统一化

20世纪以来,数学的发展也像其他科学一样,一方面不可避免地越来越分化成许多分支,另一方面则存在着相反的趋势,即不同学科相互渗透、结合的趋势.20世纪下半叶,数学科学的这种统一化趋势空前加强.不同分支领域的数学思想与数学方法相互融合,导致了一系列重大发现以及数学内部新的综合交叉学科的不断兴起.本节将按统一性的观点对20世纪纯粹数学的部分分支作一扫视.我们将会看到,至少从使用的数学方法而论,数学中不同分支的界限正在变得模糊.

(一)微分拓扑与代数拓扑

拓扑学的基本对象是"流形".流形是通常曲面的推广.如果撇开具

体的曲面形象,一个 n 维流形的抽象定义是指具有下列性质的对象:它从任何一个局部看都很像通常的 n 维欧几里得空间($\mathbf{R}^n$).如二维球面就是一个二维流形:任意一小片球面看上去都像一小片平面.当然局部相象并不能推出整体相象,不过这种局部相象使我们可以在任一流形的局部区域建立笛卡儿坐标系以及以其为基础的通常的微分运算.如果能够进一步在整个流形上建立起协调一致的微分运算,就称这样的流形为"微分流形"或"光滑流形",而称作为微分运算基础的、能覆盖整个流形的坐标系(类似于球面上的经、纬线)为"微分结构".这里"协调一致"是指从流形的一个局部过渡到另一个局部时不会发生相互冲突.

以微分流形为基本对象的拓扑学叫微分拓扑学.微分拓扑学的创始人是美国数学家惠特尼(H. Whitney,1907—1989),他 1936 年发表《微分流形》一文,给出了微分流形的一般定义,并证明了任何微分流形 M^n 总可以嵌入到高维欧氏空间作为光滑子流形.1937 年他又引进了重要的基本概念"纤维丛".纤维丛可以粗略地看成是普通曲面及其上每点的切平面所成总体的推广.对一般的流形,惠特尼将流形本身及其上每一点的线性独立的切向量组的全体总括在一起而得到纤维丛的概念,并定义了作为纤维丛结构的基本不变量的惠特尼示性类.

惠特尼示性类的定义涉及上同调类,因而使微分拓扑与代数拓扑紧密地联系起来.事实上,微分拓扑学中广泛地使用着与同调、同伦等有关的代数拓扑方法.反过来,代数拓扑学又受到了微分拓扑学的推动.纤维丛由于其局部线性的特性而成为代数拓扑中同调与上同调计算的便利工具.

微分拓扑学在 1950 年代由于米尔诺等的工作而进入了黄金时期(参见 13.3).

微分拓扑学中研究微分映射 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 的奇点性质的分支叫**奇点理论**,它也是由惠特尼所开创(1955).所谓奇点是通常微积分中函数临界点(使 $f'(x)=0$ 的点)的推广.1956 年,托姆(R. Thom)发表《可微映射的奇点》,成为以后整个奇点理论发展的纲领.1969 年,托姆在奇点分类基础上提出了一个描述突变现象的数学模型,以后又在《结构

稳定与形态发生》(1972) 这部专著中系统论述了这方面的思想,从而又形成了一门新的分支 —— 突变理论(catastrophe theory). 突变理论提供了研究自然界中不连续变化现象的数学工具.

(二) 整体微分几何

微分几何以微分为主要研究工具,因此古典微分几何多是局部性即小范围的.

黎曼几何在空间每一点附近建立局部的二次微分变量形式

$$ds^2 = \sum g_{ij} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j .$$

19 世纪末,意大利数学家里奇(C. G. Ricci, 1853—1925) 发展了黎曼关于微分形式不变量的研究,开创了所谓"绝对微分学" 即现在的张量分析,系统地研究黎曼度量在坐标变换之下的不变性质. 1917 年,里奇的学生列维 - 奇维塔(T. Levi-Civita, 1873—1941) 引进"列维 - 奇维塔平移",将欧氏空间的平行概念推广到弯曲空间,使黎曼几何具有了明显的几何意义. 后来外尔发现平行性与空间的度量性质无关,从而建立所谓仿射联络(1918),摆脱度量定义平移与曲率,从而建立更广泛的几何理论. 1920 年以后嘉当(E. Cartan, 1869—1951) 发展了一般的联络理论与活动标架法.

嘉当联络是纤维丛概念的先声,但在 1930 年代以前,黎曼几何的研究,包括嘉当的工作,主要是小范围的. 1925 年,霍普夫注意到黎曼空间的微分几何结构与拓扑结构的关系,微分几何开始经历从局部到整体的转移.

整体微分几何以研究微分几何(小范围) 性质与大范围性质之间的联系为目标. 由于纤维丛的概念反映了流形的固有的拓扑性质,它提供了从局部研究向整体研究过渡的合适机制. 因此整体微分几何的研究与微分拓扑学便有不解之缘,纤维丛与示性类的引入,使整体微分几何的研究出现了突破,陈省身在这方面有奠基性的贡献(参见 13.2).

微分几何本来就是分析在几何中的应用. 整体微分几何则表现出与现代分析更深刻的联系,特别是非线性偏微分方程理论的运用,引出了整体微分几何的重大成果. 典型的例子是丘成桐 1976 年解决了微分

几何领域里著名的“卡拉比猜想”.这是给定里奇曲率求黎曼度量的问题,其中需要求解高难度的非线性偏微分方程.丘成桐还解决了一系列与非线性偏微分方程有关的其他几何问题,并证明了广义相对论中的正质量猜想等等.由于这些工作,1982 年丘成桐荣获菲尔兹奖.

(三) 代数几何

代数几何原来是伴随解析几何发展起来的以欧氏空间中的曲线和曲面为对象的分支,后来演变为研究若干代数方程的公共零点集(即代数簇)的几何性质.虽然在20世纪以前已积累了大量工作,代数几何的基础却不牢固.直到 1939 年,范德瓦尔登才利用交换代数的方法奠定了代数几何的新基础.1946 年,韦依(A. Weil)发表《代数几何基础》,利用抽象代数方法建立了抽象域上的代数几何理论,以后代数几何的发展便与代数拓扑、多复变函数、抽象代数、微分几何等交织在一起,并取得了重大的进展.

1955 年,法国数学家塞尔(J. – P. Serre)利用拓扑学中“层”的概念建立代数簇的理论,以此为基础格罗申迪克(A. Grothendieck)将代数簇概念推广为更一般的“概型”.概型的概念使代数几何的发展进入了新阶段.它不仅统一了代数几何本身的各种理论与结果,而且使代数几何与代数数论的研究统一到共同的语言下,形成了所谓“算术代数几何”,并引导了重大的突破,例如 1973 年德利涅(P. Deligne)用格罗申迪克理论证明了韦依猜想(一般代数簇上的黎曼猜想);法尔廷斯 1983 年证明莫代尔猜想(参见 13.9)等.1994 年维尔斯证明费马大定理的工作,也是属于算术代数几何的范畴.

(四) 多复变函数论

单复变函数论在 19 世纪经以皮卡(C. E. Picard)为代表的法国函数论学派的工作已有很大发展.1929—1935 年间,芬兰数学家奈凡林那(R. H. Nevanlinna,1895—1980)建立了统一的亚纯函数值分布理论——奈凡林那理论.之后有将近 10 年的停顿.1935 年,奈凡林那的学生阿尔福斯(L. V. Ahlfors)将拓扑方法引入奈凡林那理论的研究,建立了所谓复盖面理论,作出了新的重大贡献.单复变函数论在 20 世纪

在黎曼曲面与单值化、拟共形映照等方面都有重要进展,1984年,德布兰奇(L. de Blanges)还证明了近70年悬而未决的比贝巴赫(L. Bieberbach)猜想(对单位圆内的单叶解析函数 $z+\sum_{n-2}^{\infty}a_nz^n$,应有 $|a_n|\leqslant n$).

多复变函数论是单复变函数论的自然推广,但多变量情形的复杂性使这种推广在1950年以前进展缓慢.到20世纪下半叶,由于综合运用了拓扑学、微分几何、偏微分方程论以及抽象代数等领域的概念与方法,多复变函数论的研究取得了长足的进步.一个重大的突破是古典黎曼-洛赫定理的推广,我们将在第13章中进行介绍.

中国数学家华罗庚1953年建立了多个复变数典型域上的调和分析理论,并揭示了其与微分几何、群表示论、微分方程、群上调和分析等领域的深刻联系,形成了中国数学家在多复变函数论研究方面的特色.

(五)动力系统

庞加莱关于常微分方程定性理论的一系列课题,成为动力系统理论的出发点.美国数学家伯克霍夫(G. D. Birkhoff,1884—1944)从1912年起以三体问题为背景,扩展了动力系统的研究.1937年,庞特里亚金提出结构稳定性概念,要求在微小扰动下保持相图(拓扑结构)不变,使动力系统的研究向大范围转化.

动力系统的研究由于拓扑方法与分析方法的有力结合而取得了重大进步,借助于计算机模拟又引发具有异常复杂性的混沌、分岔、分形理论,这方面的研究涉及众多的数学分支.

1925年莫尔斯(H. M. Morse,1892—1977)推广伯克霍夫动力系统理论中极小极大原理,得到莫尔斯不等式,以后又发展成所谓"莫尔斯理论",即讨论微分流形上可微函数 f 的临界点的理论.临界点是局部坐标下使 $\frac{\partial f}{\partial x_i}=0$ 的点,可以看成是通常函数极值点的推广.临界点理论应用于变分问题就得到大范围变分法.它们与微分拓扑学一起构成一个相互交叉、相互影响的学科群.

（六）偏微分方程与泛函分析

偏微分方程论在以往主要以幂级数为工具来研究. 在 20 世纪，由于采取了泛函分析的观点与方法而打开了全新的局面. 用抽象空间上的微分算子来表述偏微分方程并应用各种泛函分析的方法加以研究，引出了偏微分方程论的许多重要成果. 瑞典数学家霍尔曼德(L.V. Hörmander)1959 年得到一般变系数线性偏微分方程解的存在性、唯一性与正则性的条件，就是偏微分方程论应用泛函分析方法的典型成果. 1965 年霍尔曼德与尼伦伯格(J. Nirenberg) 等又共同发展了更一般的伪微分算子理论. 伪微分算子与 1970 年以后提出的傅里叶积分算子都已成为偏微分方程研究中强有力的工具.

现代偏微分方程论与拓扑学、微分几何、多复变函数论等分支都有密切的联系.

（七）随机分析

日本数学家伊藤清引进的随机积分与随机微分方程(11.2.5)，为一门意义深远的数学新分支 —— 随机分析的发展奠定了基础. 自那以后，概率论向分析与几何领域渗透日益加剧，还产生了随机微分几何、无穷维随机分析等领域. 1976 年马利安文(P. Malliavin) 等用随机分析方法重新证明了阿蒂亚 - 辛格指标定理和偏微分椭圆算子的霍尔曼德定理，更加深刻地揭示了随机性数学与决定性数学的内在统一性，随机分析的研究方兴未艾，并与理论物理密切相关.

数学的有机统一，是这门科学固有的特点. 按照希尔伯特的观点，“数学理论越是向前发展，它的结构就变得越加调和一致，并且这门科学一向相互隔绝的分支之间也显露出原先意想不到的关系. 因此随着数学的发展，它的有机的特性不会丧失，只会更清楚地呈现出来”. 20 世纪数学的发展，证实了希尔伯特的看法. 尽管现代数学知识千差万别，在作为整体的数学中，使用着相同的工具与算法，存在着概念的亲缘关系. 数学内部的这种统一性，也正是它能够作为科学的普遍语言的根源所在，必然对它所应用的科学技术领域带来深远影响. 正因为如此，数学家们对联系数学中不同领域与部门、追求统一目标的工作，总

是给予高度评价.数学科学的统一趋势将保持下去,并继续成为 21 世纪数学的重要特征之一.

11.4　对基础的深入探讨

数学的严格基础,自古希腊以来就是数学家们追求的目标.这样的追求,在 20 世纪以前曾经历过两次巨大的考验,即古希腊不可公度量的发现和 17、18 世纪关于微积分基础的争论,而 19 世纪末分析严格化的最高成就 —— 集合论,似乎给数学家们带来了一劳永逸摆脱基础危机的希望.尽管集合论的相容性尚未证明,但许多人认为这只是时间问题,庞加莱甚至在 1900 年巴黎国际数学家大会上宣称:“现在我们可以说,完全的严格性已经达到了”!但就在第二年,英国数学家罗素(B. Russell,1872—1970)却以一个简单明了的集合论“悖论”,打破了人们的上述希望,引起了关于数学基础的新的争论.对数学基础的更深入的探讨及由此引起的数理逻辑的发展,是 20 世纪纯粹数学的又一重要趋势.

11.4.1　集合论悖论

罗素的悖论是:以 M 表示是其自身成员的集合(如一切概念的集合仍是一个概念)的集合,N 表示不是其自身成员的集合(如所有人的集合不是一个人)的集合.然后问:集合 N 是否为它自身的成员?如果 N 是它自身的成员,则 N 属于M 而不属于N,也就是说 N 不是它自身的成员;另一方面,如果 N 不是它自身的成员,则 N 属于 N 而不属于 M,也就是说 N 是它自身的成员.无论出现哪一种情况,都将导出矛盾的结论.

1919 年罗素又给上述悖论以通俗的形式,即所谓“理发师悖论”:某乡村理发师宣布了一条原则,他给所有不给自己刮脸的人刮脸,并且只给村里这样的人刮脸.试问:理发师是否自己给自己刮脸?如果他给自己刮脸,他就不符合他提出的原则,因此他不应该给自己刮脸;如果他不给自己刮脸,那么根据他的原则,他就应该给自己刮脸.

在罗素以前,实质上相同的悖论已经有人发现,如意大利数学家布拉里 - 福蒂(C. Burali-Forti)1897 年曾首先提出了一个关于序数的悖论;康托尔本人在 1899 年也在给戴德金的一封信中提出过一个关于基数的悖论,他说如果人们要想不陷入矛盾的话,就不能谈论一切集合的集合.因为这样的集合(记为 U) 的基数应该是最大的,但按照康托尔已经证明的事实,这个集合所有子集的集合 S(依定义它是 U 的成员)其基数必定大于该集合本身的基数.由于布拉里 - 福蒂悖论和康托尔的悖论都涉及相当专门的术语和概念,在当时并没有引起重视,人们一般以为它们只是因某些推理环节上的失误所致.罗素的悖论却不同,除了集合概念外并不涉及任何其他概念,从而明白无疑地揭示了集合论本身确实存在着矛盾,在数学界引起了一片震惊.法国数学家弗雷格(G. Frege,1848—1925)在他刚刚完成的符号逻辑专著《算术基础》第 2 卷阖卷处写道:"一个科学家不会碰到比这更令人尴尬的事情了,即在一项工作完成的时候它的基础却在崩溃,当这部著作即将付印之际,罗素先生的一封信就使我处于这种境地".

罗素本人认为这类悖论的产生是由于一个待定义对象是用了包含该对象在内的一类对象来定义.这种定义也叫"非直谓定义".不久,策梅洛(E. F. F. Zermelo,1871—1953)等人进一步指出分析中一些基本概念(如一非空实数集的最小上界即上确界等)的定义也都是属于非直谓定义,因此不仅集合论,而且整个经典分析都包含着悖论.

为了消除悖论,数学家们首先求助于将康托尔以相当随意的方式叙述的"朴素集合论"加以公理化.第一个集合论公理系统是 1908 年由策梅洛提出的,后又经弗兰克尔(A. A. Fraenkel)改进,形成了今天常用的策梅洛 - 弗兰克尔公理系统.通过对集合类型加以适当限制(满足一定的公理),这种公理化的集合论达到了避免罗素悖论的目的,而所加限制使康托尔集合论中对于开展全部经典分析所需要的主要内容得以保留.但策梅洛 - 弗兰克尔系统本身是否保证不会出现新的矛盾呢?这也是任何公理系统必须解决的相容性问题,策梅洛 - 弗兰克尔系统的相容性尚无证明.因此庞加莱形象地评论道:"为了防狼,羊群已经用篱笆圈起来了,但却不知道圈内有没有狼".

11.4.2　三大学派

解决集合论悖论的进一步尝试,是从逻辑上去寻找问题的症结.集合论公理化运动是假定了数学运用的逻辑本身不成问题,但数学家们对于这一前提陆续提出了不同的观点,并形成了关于数学基础的三大学派,即:以罗素为代表的逻辑主义;以布劳威尔为代表的直觉主义和以希尔伯特为代表的形式主义.

(一) 逻辑主义(logicism)

逻辑主义的基本思想在罗素1903年发表的《数学的原理》(The Principles of Mathematics)中已有大概的轮廓,罗素后来与怀特黑德(A.Whitehead,1861—1947)合著的三大卷《数学原理》(Principia mathematica,1910—1913),是逻辑主义的权威性论述.按照罗素的观点,"数学就是逻辑",全部数学可以由逻辑推导出来——数学概念可以借逻辑概念来定义,数学定理可以由逻辑公理按逻辑规则推出.至于逻辑的展开,则是依靠公理化方法进行,即从一些不定义的逻辑概念和不加证明的逻辑公理出发,通过符号演算的形式来建立整个逻辑体系.为了避免悖论,罗素创造了一套"类型论".类型论将对象区分为不同的层次(类型),处在最低层的是0型类的对象,属0型的类构成1型类的对象,…… 如此等等.在应用类型的理论中,必须始终贯彻如下的原则:一定类的所有元素必须属于同一类型,类相对于其自身成员是高一级类型的对象.这样,集合本身就不能是它自己的成员,类型论避免了集合论悖论的产生.

罗素还进一步论述了关于命题函数的分支类型论,并引进了重要的"约化公理",约化公理对任何层次的一个命题都确认存在着一个等价的0型命题函数.逻辑主义在将数学奠基于逻辑方面的巨大努力,被许多数学家赞许并接受,但也遭到了严厉的批评.约化公理被指出是非逻辑公理而不符合将数学化归为逻辑的初衷,按类型论建立数学开展起来极为复杂.事实上,罗素和怀特黑德的体系一直是未完成的,在很多细节上是不清楚的.尽管如此,逻辑主义以纯粹符号的形式实现逻辑

的彻底公理化，特别是罗素、怀特黑德《数学原理》第二、三卷提出的“关系算术理论”，建立了完整的命题演算与谓词演算系统，这一切构成了对现代数理逻辑的重大贡献.

(二) 直觉主义(intuitionism)

直觉主义对数学基础采取了完全不同的观点.直觉主义的先驱是克罗内克和庞加莱，但作为一个学派则是荷兰数学家布劳威尔(L.E. Brouwer,1881—1966)开创的.布劳威尔1907年在他的博士论文《论数学基础》中搭建了直觉主义数学的框架，1912年以后又大大发展了这方面的理论.直觉主义的基本思想是：数学独立于逻辑，数学的基础是一种能使人认识“知觉单位”1以及自然数列的原始直觉.坚持数学对象的“构造性”定义，是直觉主义哲学的精粹.按照这种观点，要证明任何数学对象的存在，必须同时证明它可以用有限的步骤构造出来.因此直觉主义不承认仅使用反证法的存在性证明.在集合论中，直觉主义也只承认可构造的无穷集合(如自然数列)，这就排除了“所有集合的集合”那样的矛盾集合的可能性.

直觉主义关于有限的可构造性的主张导致了对古典数学中普遍接受的“排中律”(非真即假)的否定.对直觉主义者来说，排中律仅存在于有限集合中，对无穷集合不能使用.例如考虑数 x，它被定义为 $x=(-1)^k$，其中 k 是 π 的十进表示式中第一个零的位数，在这个零之后连续依次出现了1,2,3,4,…,9.如果不存在这样的 k，则 $x=0$.通常认为这个数 x 是被很好地定义了，但对直觉主义者来说，“$x=0$”这个命题的真假却不能断定，因为使命题真或假的 k 无法用有限步骤构造出来，在这里排中律不能适用.

布劳威尔的学说获得了一定的拥护者，其中包括希尔伯特著名的学生外尔(H.Weyl,1885—1955).他们作了很大的努力，对有关的直觉主义概念和直觉主义数学所使用的逻辑作出严格的陈述，并进一步发展了构造性的数学.今天，直觉主义提倡的构造性数学已成为数学科学中一个重要的学科群体，并与计算机科学密切相关.

但是，直觉主义的一个重要缺陷是在于：严格限制使用排中律将使

古典数学中大批受数学家珍视的东西成为牺牲品,这引起了许多数学家的不安甚至恼怒.希尔伯特抨击直觉主义者要对数学科学“大砍大杀”,他警告说:“如果听从他们所建议的这种改革,我们就要冒险,就会丧失大部分最宝贵的财富”.希尔伯特开了一张将会丧失的“财富”清单:无理数的一般概念;康托尔的超限数;在无限多个正整数中存在一个最小数的定理,……,等等.希尔伯特认为:“禁止数学家使用排中律,就像禁止天文学家使用望远镜一样”.

希尔伯特在批判直觉主义的同时,抛出了他自己思索已久的克服数学危机的方案,他相信这个方案可以在不减少任何“财富”的情况下挽救整个古典数学.这一方案以“希尔伯特纲领”著称,通常也叫形式主义纲领,虽然希尔伯特本人从未自称为形式主义者.

(三)形式主义(formalism)

形式主义纲领的要旨是:将数学彻底形式化为一个系统.在这个形式系统中,人们必须通过逻辑的方法来进行数学语句的公式表述,并用形式的程序表示推理:确定一个公式——确定这公式蕴含另一个公式——再确定这第二个公式,依此类推,数学证明便由这样一条公式的链构成.在这里,语句只有逻辑结构而无实际内容,从公式到公式的演绎过程不涉及到公式的任何意义,这是形式主义与逻辑主义的重要区别.

对于任何形式系统确立其相容性是形式主义纲领的首要任务,希尔伯特提出了一套直接证明形式系统相容性的设想,这套设想被称之为“证明论”或“元数学”(metamathematics),它是形式主义纲领的核心.证明论的基本思路是:只使用普遍承认的有限性方法与符号规则,来证明在该系统中不可能导出公式$0 \neq 0$.这里有限性方法是通过引进一条所谓“超限公理”来保障的,希尔伯特借助于这条公理将形式系统中的一切超限工具(如选择公理、全称量词、……、等等)皆归结为一个超限函子τ,然后系统地消去包含τ的所有环节.

有限性原则的采用是吸取了直觉主义观点中的合理成分.但与直觉主义不同的是,形式化推理的进行要求保留排中律,这也由超限公理

的应用加以保障.

希尔伯特的形式主义纲领是他早年关于几何基础公理化方法的发展与深化.希尔伯特自1904年起在多次讲演中提出并阐释过自己关于数学基础的观点,后来又在与其助手阿克曼(F.W.Ackermann,1896—1962)和伯奈斯(P.Bernays,1888—1977)分别合著的两部专著《数理逻辑基础》(Grundzüge der Theoretischen Logik,1928)和《数学基础》(Grundlagen der Mathematik,I.1934;II.1939)中对形式主义纲领作出了系统的总结与全面的论述.

希尔伯特纲领提出以后不久,加有若干限制的自然数论的相容性即获证明,这使人们感到形式主义纲领为解决基础危机带来了希望.但是,1931年奥地利数学家哥德尔(K.Gödel,1906—1978)证明的一条定理,却出乎意料地揭示了形式主义方法的内在局限,明白无误地指出了形式系统的相容性在本系统内不能证明,从而使希尔伯特纲领受到了沉重的打击.这就是著名的"哥德尔不完全性定理",我们将在第13章中作进一步介绍.

上述关于数学基础的三大学派,在20世纪前30年间非常活跃,相互争论非常激烈.现在看来,这三大学派都未能对数学基础问题作出令人满意的解答.但它们的研究却将人们对数学基础的认识引向了空前的深度.1930年代,在哥德尔定理引起的震动之后,关于数学基础的争论渐趋淡化,数学家们更多地专注于数理逻辑的具体研究,三大学派在基础问题上积累的深刻的结果,都被纳入数理逻辑研究的范畴而极大地推动了现代数理逻辑的形成与发展.

11.4.3 数理逻辑的发展

以数学的方法研究逻辑,最先为莱布尼茨所提倡,在19世纪,布尔、施罗德、皮尔斯(C.S.Peirce,1839—1914)、佩亚诺(G.Peano,1858—1932)和弗雷格等为实现莱布尼茨的思想作出努力并取得了实质进展.但现代数理逻辑从内容到方法,主要是在20世纪关于数学基础的热烈争论中发展起来,现代数理逻辑的四大分支——公理化集合

论、证明论、模型论和递归论,也都源于 20 世纪早期关于数学基础问题的探讨.

(一) 公理化集合论

为消除集合论悖论而产生了第一个集合论公理系统 —— 策梅洛 - 弗兰克尔系统(Z-F 系统).虽然 Z-F 系统本身的相容性问题远未解决,但对这一公理系统的研究已引出了数理逻辑的重大成果,其中最引人注目的便是关于连续统假设的进展.

连续统假设是集合论中的一个基本问题(参见 10.2),在公理化集合论出现以后,数学家们很自然地要关注它在集合论公理系统中的地位.连续统假设能否由给定的公理系统形式地得到证明或被否证?1938 年哥德尔首先证明了广义连续统假设(从而连续统假设)与策梅洛 - 弗兰克尔公理系统是相容的.哥德尔同时还证明了另一条重要的集合论公理"选择公理"与 Z-F 系统的相容性.在哥德尔这一结果之后的若干年里,有一种普遍的希望,即认为连续统假设将能够在 Z-F 系统内获得证明.但 1963 年,美国斯坦福大学的柯恩(P. Cohen)却证明了:连续统假设与选择公理相对于 Z-F 系统是独立的.柯恩的证明是借助于建造一个 Z-F 模型,在其中连续统假设是假的.为了给出这样的模型,他创造了著名的"力迫法"(forcing method),力迫法现已成为证明许多数学命题独立性的有力工具.

柯恩的结果意味着连续统假设在 Z-F 系统中不可证明,而根据哥德尔的结果,连续统假设在 Z-F 中不可否证.这两个结果合起来告诉我们:在Z-F 系统中,连续统假设是一个不可判定的问题.这在一定意义上可以被看作是希尔伯特第一问题的否定解决.公理化集合论于是面临着与几何学中证明了平行公设独立性后相似的形势,即存在着连续统假设在其中不成立的集合论,有人称之为"非康托尔集合论",就好比称平行公设不成立的几何学为非欧几何一样.然而对柯恩独立性结果的意义,数学家们还存在着不同的意见.有人认为柯恩的结果只能说明 Z-F 公理系统是不完全的,因此出现了寻求新的集合论公理系统的努力.另外有些学者则对连续统假设本身产生怀疑,试图用新的公理来取

而代之. 公理化集合论的研究不断向纵深推进.

(二) 证明论

希尔伯特开拓的证明论引出了哥德尔不完全性定理. 在哥德尔之后,证明论仍然向前发展. 首先是数学家们在放宽工具限制的情况下继续寻求相容性证明. 1936 年,甘岑(G. Gentzen) 采用超限归纳法证明了算术公理系统的相容性,就是这方面一个突出的例子. 1960 年代以来,又有人证明了数学分析某些片断的相容性. 除了相容性证明,证明论还被拓广到包括证明的结构及复杂度等问题的研究.

(三) 模型论

在哥德尔不完全性定理之后,波兰数学家塔斯基(A. Tarski, 1901—1983) 提出了形式语言真假问题,开创了研究形式语言及其解释(模型) 之间关系的模型论. 模型论的一个重大成果是非标准分析的建立. 1960 年,美国数理逻辑学家罗宾逊(A. Robinson, 1918—1974) 用模型论的方法证明了实数结构可以扩张为包含无限小和无穷大数的结构,并在这种扩张实数结构上展开经典数学分析,从而创立了所谓"非标准分析". 非标准分析使莱布尼茨倡导但长期备受争议的无限小概念第一次获得了可靠的逻辑基础. 目前,非标准分析方法已被广泛地应用于数学的许多分支.

(四) 递归论

哥德尔在不完全性定理的研究中提出了算法概念的精确定义问题. 1936 年左右,几乎同时出现了三种描述算法的数学模型,它们是:克林(S. C. Kleene) 在改进哥德尔首先引进的原始递归函数基础上提出的一般递归函数;克林与丘奇(A. Church) 引进的 λ- 可定义函数;以及图灵与波斯特(E. L. Post) 各自独立定义的图灵机可计算函数. 不久发现这三种可计算函数是相互等价的,丘奇遂断言一切算法可计算函数都是一般递归函数,这就是"丘奇论题".

判断给定数学问题是否可计算或存在算法解,统称判定问题. 判定问题是递归论的主要课题. 有许多著名的判定问题,它们的解决在数学上关系重大. 如希尔伯特第十问题,寻求判定任一给定的丢番图方程

(整系数不定方程)有无整数解的一般算法. 戴维斯(M. Davis)、普特南(H. Putnam)和罗宾逊(J. Robinson)等对这一问题的解决作出了关键的贡献,在他们工作的基础上,1970 年前苏联青年数学家马蒂雅舍维奇(Ю. Матиясевич)最终证明了希尔伯特期望的一般算法是不存在的. 希尔伯特第十问题的否定解决是对古老的算法概念进行精密探讨而引出的深刻结果,被认为是 20 世纪重大的数学成果之一.

20 世纪数学概观(Ⅱ) 空前发展的应用数学

12

12.1 应用数学的新时代

数学的广泛渗透与应用,是它一贯的特点,但在数学史上,数学的应用在不同时期的发展是不平衡的.18 世纪是数学与力学紧密结合的时代;19 世纪是纯粹数学形成的时代;20 世纪则可以说既是纯粹数学的时代,又是应用数学的时代.特别是 20 世纪 40 年代以后,数学以空前的广度与深度向其他科学技术和人类知识领域渗透,加上电子计算机的推助,应用数学的蓬勃发展已形成为当代数学的一股强大潮流.应用数学的这个新时代具有以下几方面的特点.

(1) 数学的应用突破了传统的范围而向人类几乎所有的知识领域渗透.

19 世纪 70、80 年代,还是在现代数学发展的早期,恩格斯曾经对数学应用的状况作过这样的估计:"在固体力学中是绝对的,在气体力学中是近似的,在流体力学中已经比较困难了,在物理学中多半是尝试性的和相对的,在化学中是最简单的一次方程式,在生物学中等于零".从那以后经过一个多世纪的发展,可以看到恩格斯所描述的状况有了根本的改观.数学正在向包括从粒子物理到生命科学、从航空技术到地质勘探在内的一切科技领域进军.数学在物理学中的应用经历了一系列激动人心的重大事件;现代化学为了描述化学过程已少不了微分方程和积分方程,并且有许多还是连数学家都感到棘手的非线性方程;生物

学不用数学的时代也已一去不返.除了自然科学,在经济学、社会学、历史学等社会科学部门中,数学方法的应用也在崭露头角.与以往时代不同的是,数学在向外渗透过程中越来越多地与其他领域相结合而形成一系列交叉学科,如数学物理、数理化学、生物数学、数理经济学、数学地质学、数理气象学、数理语言学、数理心理学、数学考古学,…… 等等,它们的数目还在增加.

(2) 纯粹数学几乎所有的分支都获得了应用,其中最抽象的一些分支也参与了渗透.

在20世纪60年代,像拓扑学这样的抽象数学离实际应用似乎还很遥远.然而正如我们在下面要讲到的,拓扑学在今天的物理学、生物学和经济学中正在扮演重要角色.在凝聚态物理中分类晶体结构的"缺陷"及液晶理论中所用到的某些齐性空间中同伦群的计算,即使对专业的代数拓扑学家也是很难的问题;数论曾经被英国数学家哈代看成是"无用"和"清白"的学问,哈代说"至今还没有人能发现有什么火药味的东西是数论或相对论造成的",并预言"将来很多年也不会有人能够发现这类事情",但1982年以来,哈代所钟爱的"清白"学问数论,已经在密码技术("公开密钥"系统)、卫星信号传输、计算机科学和量子场论等许多部门发挥重要的有时是关键的作用.

事实上,单就在物理学中获得应用的前沿数学而言,所涉及的抽象数学分支就包括了微分拓扑学、代数拓扑学、大范围分析、代数几何、李群与李代数、算子代数、代数数论、非交换数学等等.

(3) 现代数学对生产技术的应用变得越来越直接.以往数学工具直接用于生产技术的事例虽有发生,但数学与生产技术的关系基本上是间接的:常常是先应用于其他科学(如力学、天文学),再由这些科学提供技术进步的基础.20世纪下半叶以来,数学科学与生产技术的相互作用正在加强,数学提供的工具直接影响和推动技术进步的频率正在加大,并在许多情况下产生巨大的经济效益.例如以计算流体力学为基础的数值模拟已成为飞行器设计的有效工具,类似的数值模拟方法正在被应用于许多技术部门以替代耗资巨大的试验;1980年代以来,以调和分析为基础的小波分析直接应用于通信、石油勘探与图象处理

等广泛的技术领域;现代大规模生产的管理决策、产品质量控制等也密切依赖于数学中的线性规划算法与统计方法;现代医学仪器工业也离不开数学(如 CT 扫描仪、核磁共振仪等研制的理论基础主要是现代积分理论),等等,这样的例子举不胜举.

(4) 现代数学在向外渗透的过程中,产生了一些相对独立的应用学科,这些学科以数学方法与数学理论为基础,但不同于上面提到的交叉应用分支,其应用对象不只是限于某一门特殊的学科(如物理、化学、生物等),而是适用于相当广泛的领域.这样的应用学科有数理统计、运筹学、控制论等等.

20 世纪数学空前广泛的应用,是与它的另一个特点即前面已解释过的更高的抽象化趋势共轭发展着.我们看到,一方面数学的核心领域正变得越来越抽象,一方面数学的应用也变得越来越广泛.核心数学创造的许多高度抽象的语言、结构、方法与理论,被反复地证实是其他科学技术和人类生产与社会实践中普遍适用的工具,这恰恰反映了数学抽象理论与客观现实世界之间的深刻、复杂而又奇妙的联系.数学的高度抽象性与内在统一性,不断在更高的层次上决定着这门科学应用的广泛性.

12.2　数学向其他科学的渗透

本节以数学物理、生物数学与数理经济学为例来说明 20 世纪数学向其他科学的渗透.

12.2.1　数学物理

物理学应用数学的历史较长.18 世纪是数学与经典力学相结合的黄金时期.19 世纪数学应用的重点转移到电学与电磁学,并且由于剑桥学派的努力而形成了数学物理分支.进入 20 世纪以后,随着物理科学的发展,数学相继在应用于相对论、量子力学以及基本粒子理论等方面取得了一个又一个突破,极大地丰富了数学物理的内容,同时也反过来刺激了数学自身的进步.

在 20 世纪初狭义相对论和广义相对论的创立过程中,数学都建有奇功. 1907 年,德国数学家闵可夫斯基(H. Minkowski,1864—1909)提出了"闵可夫斯基空间",即将时间与空间融合在一起的四维时空 $R^{3,1}$. 闵可夫斯基几何为爱因斯坦狭义相对论提供了合适的数学模型. 有了闵可夫斯基时空模型后,爱因斯坦又进一步研究引力场理论以建立广义相对论. 1912 年夏他已经概括出新的引力理论的基本物理原理,但为了实现广义相对论的目标,还必须寻求理论的数学结构,爱因斯坦为此花费了 3 年的时间,最后在数学家格罗斯曼(M. Grossmann)介绍下掌握了发展相对论引力学说所必需的数学工具 —— 以黎曼几何为基础的绝对微分学,亦即爱因斯坦后来所称的张量分析. 在 1915 年 11 月 25 日发表的一篇论文中,爱因斯坦终于导出了广义协变的引力场方程

$$R_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right),$$

$g_{\mu\nu}$ 就是黎曼度规张量. 爱因斯坦指出:"由于这组方程,广义相对论作为一种逻辑结构终于大功告成!"

根据爱因斯坦的理论,时空整体是不均匀的,只是在微小的区域内可以近似地看作均匀. 在数学上,广义相对论的时空可以解释为一种黎曼空间,非均匀时空连续区可借助于现成的黎曼度量

$$ds^2 = \sum_{\mu,\upsilon} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\upsilon (\mu, \upsilon = 1,2)$$

来描述. 这样,广义相对论的数学表述第一次揭示了非欧几何的现实意义,成为历史上数学应用最伟大的例子之一.

在数学史上有意义的是,与爱因斯坦建立引力场方程的同时,数学家希尔伯特也沿着另一条道路独立地得到了引力场方程. 希尔伯特采取公理化方法,从两条基本公理 —— 世界函数公理和广义协变公理出发,运用当时的一项纯数学成果 ——E. 诺特关于连续群的不变式理论,得出了他的全部理论. 希尔伯特于 1915 年 11 月 20 日向哥廷根科学会提交了关于物理学基础的第一份报告,其中得到了一组与爱因斯坦 5 天后发表的引力场方程等价的方程,因而也成为现代引力理论的奠

基人.希尔伯特在他关于物理学基础的报告正式出版时说道:“我所获得的场的微分方程与爱因斯坦稍后发表的论文中指出的广义相对论的漂亮理论不谋而合”.不过这两位伟大的学者之间却没有发生关于优先权的争执,反而进行了一系列友好的通信.希尔伯特将建立广义相对论的荣誉归于爱因斯坦,并在1915年颁发第3届波约数学奖时主动推荐了爱因斯坦,“因为在他的一切成就中所体现的高度的数学精神.”

20世纪数学物理的另一项经典成果是量子力学数学基础的确立.我们知道,20世纪初,普朗克(M. Planck)、爱因斯坦、玻尔(N. Bohr)等创立了量子力学,但到1925年为止,还没有一种量子理论能以统一的结构来概括这一领域已经积累的知识,当时的量子力学可以说是本质上相互独立的、有时甚至相互矛盾的部分的混合体.1925年有了重要进展,由海森堡建立的矩阵力学和由薛定谔发展的波动力学形成了两大量子理论,而进一步将这两大理论融合为统一的体系,便成为当时科学界的当务之急.恰恰在这时,数学又起了意想不到的但却是决定性的作用.1927年,希尔伯特和冯·诺依曼、诺德海姆(L. Nordheim)合作发表了论文《论量子力学基础》,开始了用积分方程等分析工具使量子力学统一化的努力.在随后两年中,冯·诺依曼又进一步利用他从希尔伯特关于积分方程的工作中提炼出来的抽象希尔伯特空间理论,去解决量子力学的特征值问题,并最终将希尔伯特的谱理论推广到量子力学中经常出现的无界算子情形,从而奠定了量子力学的严格的数学基础.1932年,冯·诺依曼发表了总结性著作《量子力学的数学基础》,完成了量子力学的公理化.

现在越来越清楚,希尔伯特20世纪初关于积分方程的工作以及由此发展起来的无穷多个变量的理论,确实是量子力学的非常合适的数学工具.量子力学的奠基人之一海森堡后来说:“量子力学的数学方法原来就是希尔伯特积分方程理论的直接应用,这真是一件特别幸运的事情!”而希尔伯特本人则深有感触地回顾道:“无穷多个变量的理论研究,完全是出于纯粹数学的兴趣.我甚至管这理论叫‘谱分析’,当时根本没有预料到它后来会在实际的物理光谱理论中获得应用”.

抽象的数学成果最终成为其他科学新理论的仿佛是定做的工具,

在20世纪下半叶又演出了精彩的一幕,这就是大范围微分几何在统一场论中的应用.广义相对论的发展,逐渐促使科学家们去寻求电磁场与引力场的统一表述,这方面第一个大胆的尝试是数学家外尔(H. Weyl)在1918年提出的规范场理论,外尔自己称之为"规范不变几何".统一场论的探索后来又扩展到基本粒子间的强相互作用和弱相互作用.1954年,物理学家杨振宁和米尔斯(R. L. Mills)提出的"杨-米尔斯理论",揭示了规范不变性可能是所有四种(电磁、引力、强、弱)相互作用的共性,开辟了用规范场论来统一自然界这4种相互作用的新途径.数学家们很快就注意到杨-米尔斯理论所需要的数学工具早已存在,物理规范势实际上就是微分几何中纤维丛上的联络,20世纪30、40年代以来已经得到深入的研究.不仅如此,人们还发现规范场的杨-米尔斯方程是一组在数学上有重要意义的非线性偏微分方程.1975年以来,对杨-米尔斯方程的研究取得了许多重要成果,展示了统一场论的诱人前景,同时也推动了数学自身的发展.

1981年以来兴起的"超弦理论",正成为数学家与物理学家携手合作的又一个活跃领域.超弦理论也是以引力理论、量子力学和粒子相互作用的统一数学描述为目标,其中用到的数学已涉及微分拓扑、代数几何、微分几何、群论与无穷维代数、复分析与黎曼曲面的模理论等.

12.2.2 生物数学

与物理、化学相比,生物学中应用数学相当迟缓.将数学方法引进生物学研究大约始于20世纪初,英国统计学家皮尔逊(K. Pearson, 1857—1936)首先将统计学应用于遗传学与进化论,并于1902年创办了《生物统计学》(Biometrika)杂志,统计方法在生物学中的应用变得日益广泛.1926年,意大利数学家伏尔泰拉(V. Volterra)提出著名的伏尔泰拉方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - bxy, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cxy - dy, \end{cases}$$

成功地解释了生物学家观察到的地中海不同鱼种周期消长的现象(方程中 x 表示食饵即被食小鱼数,y 表示捕食者即食肉大鱼数),从此微分方程又成为建立各种生物模型的重要工具. 用微分方程建立生物模型在 20 世纪 50 年代曾获得轰动性成果,这就是描述神经脉冲传导过程的数学模型霍奇金 - 哈斯利(Hodgkin-Huxley)方程(1952)和描述视觉系统侧抑制作用的哈特莱因 - 拉特里夫(Hartline-Ratliff)方程(1958),它们都是复杂的非线性方程组,引起了数学家和生物学家的浓厚兴趣. 这两项工作分别获得 1963 年和 1967 年度诺贝尔医学生理学奖.

20 世纪 50 年代是数学与生物学结缘的良好时期,也是在这一时期,科学家们发现了脱氧核糖核酸(即 DNA)的双螺旋结构(如图 12.1,1953,美国生物化学家 J.D. 沃森和英国物理学家 F.H.C. 克里克). 双螺旋模型的发现标志着分子生物学的诞生,同时也拉开了抽象的拓扑学与生物学结合的序幕. 现代实验技术使生物学家们在电子显微镜下看到 DNA 双螺旋链有缠绕与纽结. 采用把 DNA 的纽结解开再把它们复制出来的办法去了解 DNA 的结构,这就使代数拓扑学中的纽结理论有了用武之地. 早在 19 世纪,高斯就讨论过纽结问题,并指出,"对两条闭曲线或无限长曲线的缠绕情况进行计数,将是位置几何(即拓扑学)与度量几何的边缘领域里的一个主要任务." 一个多世纪后,高斯预言的这项数学任务,竟也成为揭示生命奥秘的 DNA 结构研究中的一项重要任务. 1969 年以来,数学家与生物学家合作在计算双螺旋"环绕数"(刻画两条闭曲线相互缠绕情况的拓扑不变量)方面取得了许多进展(如怀特公式,J.H. White,1969);1984 年,关于纽结的新的不变量 —— 琼斯(Jones)多项式的发现,使生物学家有了一种新的工具对他们在 DNA 的结构中观察到的纽结进行分类. 另外,1976 年以来,数学家与生物学家合

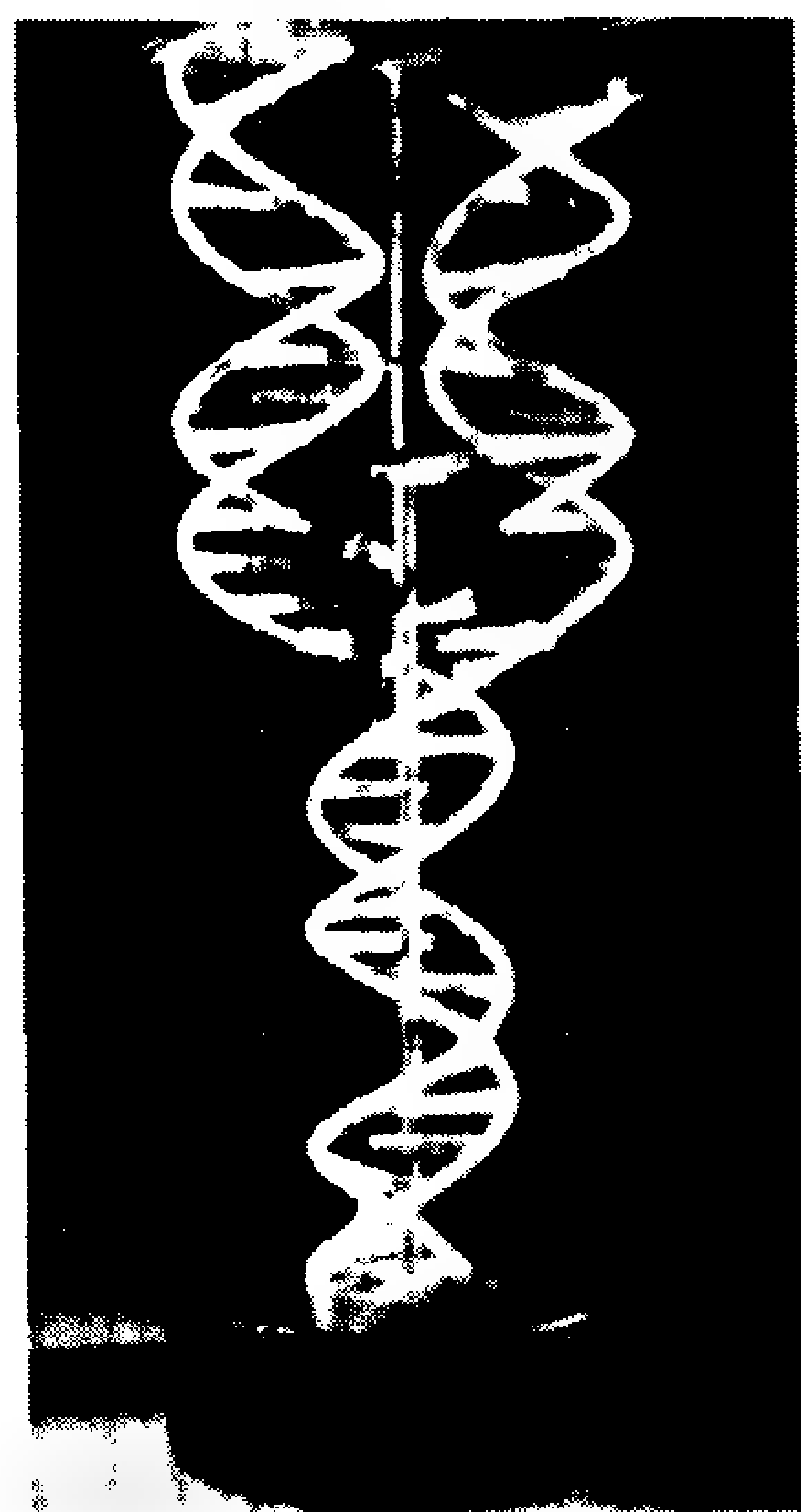


图 12.1 DNA 双螺旋结构模型

作在运用统计学与组合数学来了解 DNA 链中碱基的排序方面也取得了令人鼓舞的成绩.

冯·诺依曼说过:"在现代实验科学中,能否接受数学方法或与数学相近的物理学方法,已越来越成为该学科成功与否的重要标准."20 世纪60 年代,数学方法在医学诊断技术中的应用提供了这方面的又一重要例证,这就是 CT 扫描仪的发明. 1963—1964 年间,美籍南非理论物理学家科马克(A. M. Cormack)发表了计算人体不同组织对 X 射线吸收量的数学公式,解决了计算机断层扫描的理论问题. 科马克的工作促使英国工程师亨斯菲尔德(G. N. Hounsfield)发明了第一台计算机 X 射线断层扫描仪即 CT 扫描仪. 科马克和亨斯菲尔德共同荣获了 1979 年诺贝尔医学生理学奖.

科马克的计算公式是建立在积分几何中拉东(J. Radon)变换

$$\hat{f}(x) = \int_{\xi} f(x)\mathrm{d}_{\xi} x$$

的基础之上. 如图 12.2,设 I_0 是 X 射线穿入人体组织(图中平面区域 Ω)前的强度;I 是射线穿出后的强度;$f(x,y)$ 表示点(x,y)沿 L 变化时人体组织对射线的吸收系数(与组织密度等有关).

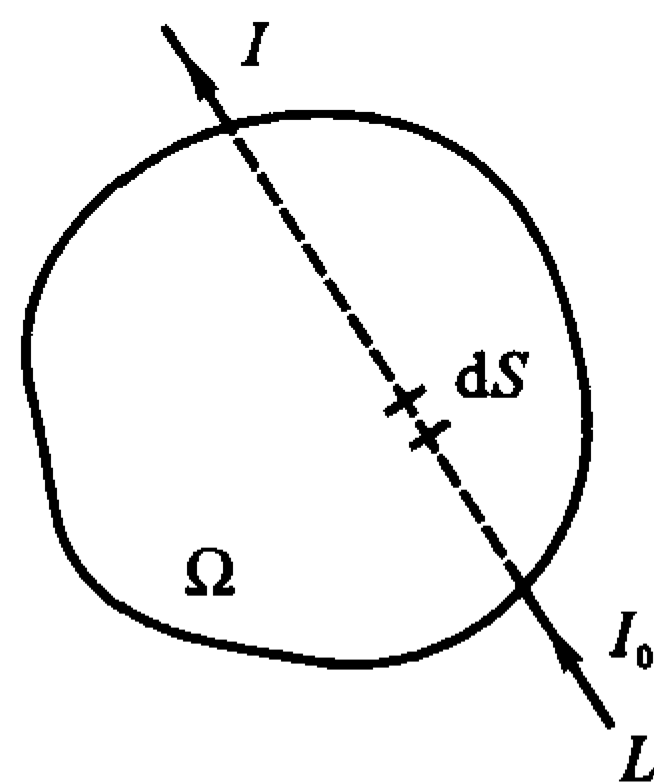


图 12.2

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = - f(x,y) \cdot I,$$

$$I(t)\big|_{t=0} = I_0,$$

$$I = I_0 e^{-\int_L f(x,y)\mathrm{d}s},$$

记

$$g = \ln\frac{I_0}{I} = \int_L f(x,y)\mathrm{d}s.$$

在 Ω 内,直线 L 与 Ω 从各个方向相交. 若沿这些直线测出 g 的值,是否能由 g 定出函数 $f(x,y)$?科马克利用与拉东变换相关的一套计算(卷积反投影等)解决了这一问题,从而能根据测量所得的 g 值建立函数 $f(x,y)$,并进一步用计算机重建人体组织横断面图.

除了数理统计、微分方程、拓扑学和积分论,概率论(马尔可夫过程

等）应用于人口理论和种群理论；布尔代数应用于神经网络描述；傅里叶分析应用于生物高分子结构分析，…… 等等，这一切构成了“生物数学”的丰富内容.现代生物数学可以按方法论分成三大部门，即生物统计、生物动力系统和生物控制论.

12.2.3 数理经济学

20 世纪 40 年代以来，经济学研究的数学化，导致了数理经济学的诞生.参与这门交叉学科建立和发展的有冯·诺依曼等著名数学家.冯·诺依曼与摩根斯顿（O. Morgenstern）合著的《博奕论与经济行为》(Theory of Games and Economic Behavior，1944）提出竞争的数学模型并应用于经济问题，成为现代数理经济学的开端.20 世纪 50 年代以来，数学方法在西方经济学中占据了重要地位，以致大部分诺贝尔经济学奖都授予了与数理经济学有关的工作.

前苏联数学家康托洛维奇（Л. В. Канторович，1912—1986）和美国数学家丹齐格（G. B. Dantzig）各自独立创建的线性规划论（参见 12.3），在 20 世纪 50 年代被美籍荷兰经济学家库普曼斯（T. C. Koopmans）应用于经济学而获得很大成功.库普曼斯 1951 年发表《生产和配置的活动分析》，用“活动分析”代替经典经济中的生产函数.所谓活动分析包含了两个基本概念：商品和活动.商品用 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 定义，活动用一组系数 a_{ij} 定义$(i=1,2,\cdots,n)$.例如炼钢“活动”，产出 1 吨钢，消耗 2 个人工，1 吨生铁，600 度电，活动系数 a_{ij} 形成活动矢量：

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ a_{4j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ -600 \end{pmatrix},$$

其中大于 0 的元素表示产出，小于 0 的元素表示投入.一种商品可写成活动的线性式：

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j(x_j \geqslant 0; i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,m).$$

这相当于线性规划问题求解.这种活动分析,将"生产"描述为由一系列各具固定投入与产出关系的活动,有利于用数学方法研究资源配置效率与价格体系之间的对应关系.库普曼斯与康托洛维奇同获1975年度诺贝尔经济学奖.

20世纪50年代以来数理经济学由于公理化方法的引进而取得了重大进展.1959年美籍法国数学家、经济学家德布洛(G.Debreu)发表《价格理论》,对一般经济均衡理论给出了严格的公理化表述.从此公理化方法成为现代经济学研究的基本方法.

一般经济均衡价格的存在问题是经济学界长期关注但悬而未决的问题.粗略地讲,这问题是问:是否存在一个价格体系,使得消费需求与生产供给相等?这样的价格体系就叫一般均衡价格体系.早在1874年,法国经济学家沃拉斯(L.Walras)就已将这个问题归结为由供给等于需求所决定的方程组的求解,这样导出的一般是一组复杂的非线性方程,虽经许多数学家和经济学家不懈的努力,但问题始终没有解决.直到1954年,德布洛和另一位美国经济学家阿罗(K.Arrow)才第一次利用凸集理论、不动点定理等给出了一般经济均衡的严格表述和存在性证明.德布洛的《价格理论》又使这一理论体系公理化.阿罗和德布洛先后获得1972和1983年度诺贝尔经济学奖.一般经济均衡理论在20世纪70年代以后又有了飞速发展,其研究用到了微分拓扑、代数拓扑、大范围分析、动力系统等抽象数学工具.

20世纪70年代以后,随机分析又进入了经济学领域,特别是1973年布莱克(F.Black)和斯科尔斯(M.S.Scholes)将期权定价问题归结为一个随机微分方程的解,从而导出了相当符合实际的著名的期权定价公式,即布莱克-斯科尔斯公式:

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r_f T}N(d_2),$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + r_f T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

$$N(d_i) = \int_{-\infty}^{d_i} f(z)\mathrm{d}z, \ i = 1,2.$$

布莱克 - 斯科尔斯理论被认为是金融数学方面的一项突破,它后又被默顿(R.C.Merton)进一步完善,不仅在金融活动中行之有效,产生巨大利益,而且在数学上对随机分析、随机控制、偏微分方程、非线性分析、数值分析和数理统计等领域的发展也带来极大的推动.默顿和斯科尔斯荣获1997年度诺贝尔经济学奖(应分享这一荣誉的布莱克不幸在两年前去世).

12.3 独立的应用学科

数学向另一门科学渗透到一定阶段,就会形成像我们在上一节中介绍的那样一些交叉分支,这类分支大量地、系统地应用各种数学工具,但一般说来,它们在数学方法上并不独立.20世纪应用数学发展的一个独特景观,是产生了一批具有自己的数学方法、相对独立的应用学科.这些学科大都在第二次世界大战期间形成(如运筹学、控制论等),或者是经过二战而有了飞跃的发展(如数理统计).

12.3.1 数理统计

简单的统计古来就有.在18、19世纪出现了统计推断思想的萌芽并有一定发展,但以概率论为基础、以统计推断为主要内容的现代意义的数理统计学,则到20世纪才告成熟.

1763年,英国人贝叶斯(T.Bayes)发表《论机会学说问题的求解》,其中的“贝叶斯定理”给出了在已知结果E后,对所有原因C计算其条件概率(后验概率)$P_E(C)$的公式,可以看作最早的一种统计推断程序.拉普拉斯和高斯等利用贝叶斯公式估计参数,特别是高斯由于计算行星轨道的需要建立了以“最小二乘法”为基础的误差分析(1794—1809).这些都促使统计学摆脱对观测数据的单纯描述而向强调推断的阶段过渡.

英国生物学家和统计学家 K. 皮尔逊在现代数理统计的建立上起了重要作用. 皮尔逊在 19 世纪末、20 世纪初发展了他老师高尔顿(F. Galton)首先提出的“相关”与“回归”的理论,成功地创立了生物统计学(1901). 皮尔逊提出了“总体”的概念,明确指出统计学不是研究样本本身而是要根据样本对总体进行推断,并根据这一思想提出了“拟合优度检验”,即检验作为样本取出的个体是否“拟合”从理论上确定的总体分布的问题. 这是假设检验的先声. 皮尔逊为此还发展了 χ^2 分布(德国测地学者赫尔默特(F. R. Helmert)在 1875 年曾独立发现 χ^2 分布).

皮尔逊的工作是所谓“大样本统计”的前驱. 他的学生戈塞特(W. S. Gosset)1908 年以笔名“学生”发表的“学生分布”(即 t 分布)则开创了小样本统计理论. 小样本理论强调样本必须从总体中随机地抽取,即必须是随机样本,从而使统计学研究对象从群体现象转变为随机现象.

现代数理统计学作为一门独立学科的奠基人是英国数学家费希尔(R. A. Fisher, 1890—1962). 费希尔毕业于剑桥大学,做过中学教员,曾长期在农业试验站工作,在将统计学应用于农业与遗传学方面有丰富的积累. 在 1920 和 1930 年代,费希尔提出了许多重要的统计方法,开辟了一系列统计学的分支领域. 他发展了正态总体下各种统计量的抽样分布,将已有的相关、回归理论建造为系统的相关分析与回归分析;1925 年他与叶茨(F. Yates)合作创立了试验设计这一重要的统计分支,与这种试验设计相适应的数据分析方法——方差分析,也是费希尔在 1923 年提出的. 试验设计倡导用统计方法设计试验方案,以提高试验效率,节省人力物力,因而产生了巨大的社会影响.

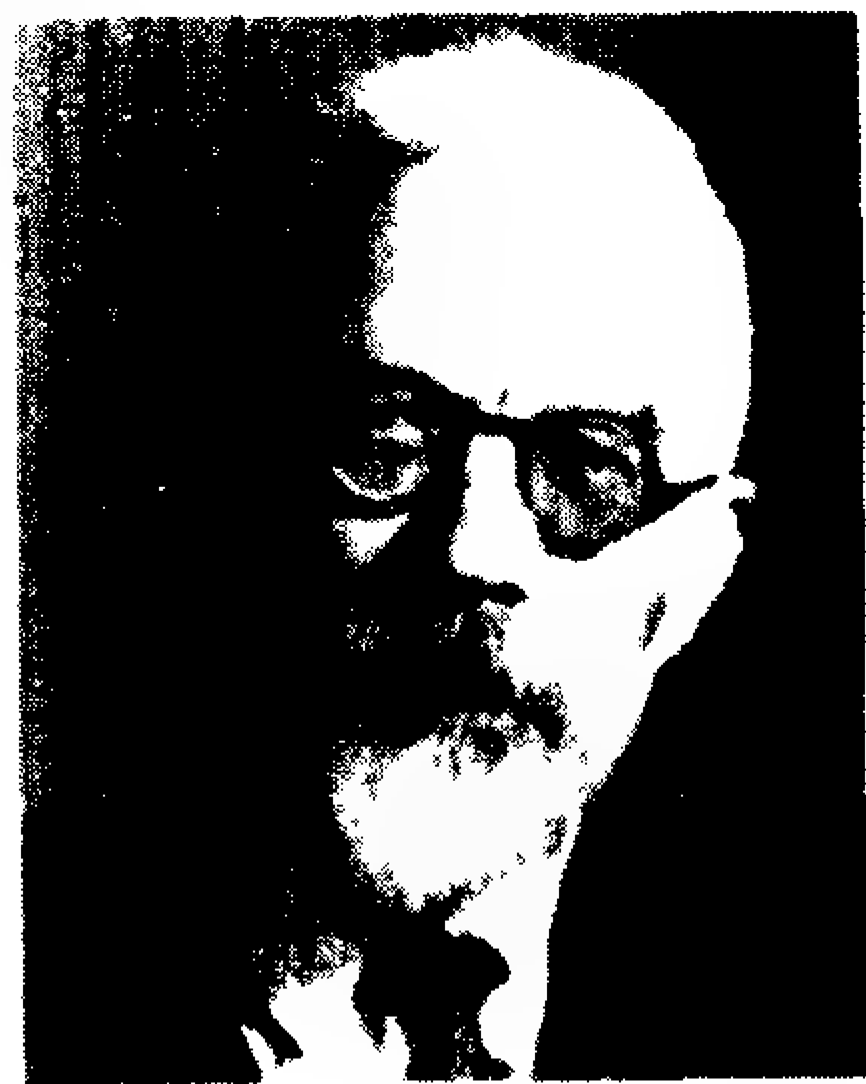


图 12.3　费希尔

费希尔也是另一门重要统计分支假设检验的先驱之一,他引进了显著性检验概念. 费希尔关于检验程序的推导方法是直观的,在数学上尚不够精炼. 1928—1938 年间,原籍罗马尼亚的美国统计学家内曼

(J. Neyman, 1894—1981) 与 K. 皮尔逊的儿子小皮尔逊(E. S. Pearson, 1895—1980) 合作,发展了假设检验的严格的数学理论,将所有可能的总体分布族看作一个集合,引进"检验功效函数"的概念作为判断检验程序好坏的标准,从而使统计推断的思想变得更加明确.

费希尔实际上还开辟了多元统计分析的方向,他关于多元正态总体的统计分析,就是一种狭义的多元分析. 1928 年维夏特(J. Wishart)导出了"维夏特分布",将这一方向发展为统计学中的一个独立分支. 多元统计分析的奠基人还有中国数学家许宝騄和美国数学家霍太林(H. Hotelling) 等.

费希尔自 1933 年起任伦敦大学学院教授,在那里领导了一个有世界影响的数理统计学派. 在 20 世纪 30、40 年代,费希尔和他的学派可以说占据了数理统计学研究的主导地位.

1946 年,瑞典数学家克拉默(H. Cramer) 发表了《统计学的数学方法》,用测度论系统总结了数理统计的发展,标志着现代数理统计学的成熟.

第二次世界大战期间,数理统计学研究中一些重要的新动向,在很大程度上决定了这门学科在战后的发展方向. 其中最有影响的是美籍罗马尼亚数学家沃尔德(A. Wald, 1902—1950) 提出的序贯分析和统计决策理论.

序贯分析的要旨是在统计推断中以"序贯抽样方案"来代替传统的固定抽样方案. 所谓序贯抽样就是分步抽样:先抽少量样本,根据结果再决定是否停止抽样还是继续抽样,以及抽多少样本. 而在经典统计中,抽样的多少是事先确定的,全部数据只影响最后结果. 采用序贯抽样可以使整个推断程序在达到一定精度时自动停止,因此有很大的优越性. 沃尔德是为了解决二战中军方提出的实际问题而研究出序贯分析这一崭新的统计方法的. 他在 1947 年发表了《序贯分析》专著,使序贯分析在战后发展为数理统计中一个重要分支.

统计决策理论也引起了战后数理统计思想的革新. 经典统计主要着眼于推断,至于所获得的论断会产生什么后果,应采取何种对策或行动,则被认为不属于统计的范畴. 沃尔德的统计决策理论则将后者也纳

入统计的内容,用博奕的观点看待数理统计问题.他还定义了统计推断程序的风险函数,用以判别推断程序的好坏.沃尔德1950年发表《统计决策函数》一书,就在这一年,他因飞机失事不幸早逝.

沃尔德在他的统计研究中积极地利用先验概率与贝叶斯定理,这与费希尔学派回避摒弃先验概率的做法大相径庭,因而引起极大反响.在20世纪下半叶,数学家们围绕着先验概率和贝叶斯定理展开的更为激烈的争论,对整个数理统计的发展有深远影响.

12.3.2 运筹学

运筹学(Operations Research)原意为"作战研究",其策源地在英国.第二次世界大战中英国空军发现空防雷达送来的信息需要加以协调,才能使雷达、战斗机系统在配合上达到满意的作战效果.当时负责英国海岸雷达系统的罗(A.P.Rowe)建议进行这方面的研究并起名为"Operational Research",英国空军还成立了专门的运筹小组.不久美国军队也开展了类似的研究并改称"Operations Research"①.运筹研究在1940年英国对付德军空袭的战斗中建有奇功,在如搜寻潜艇、深水炸弹投放方案、兵力分配等方面也都发挥了功效.到二战结束时,在英、美等国军队中服务的运筹学工作者已超过700人.战后由于这些人的倡导,运筹学被引入民用部门,研究内容不断扩充而形成为一门蓬勃发展的新兴的应用学科.目前,它已包括有数学规划论、博奕论、排队论、决策分析、图论、可靠性数学理论、库存论、搜索论等许多分支,统筹与优选也可列入运筹学的范畴,运筹学就是运用这些数学方法来解决生产、国防、商业和其他领域中的安排、筹划、控制、管理等有关的问题.

数学规划论是运筹学中一个基本而又庞大的领域,其中线性规划论则是发展最早和比较成熟的分支.

有一类实际问题需要将某些对象最大化(如利润、安全等)或最小化(如支出、风险等),数学规划就是为这类实际问题提供数学模型的一

① 中译名"运筹学"确定于1964年."运筹"一词,出自《汉书·高帝本纪》:"运筹帷幄之中,决胜千里之外".

种方法,具体地说,数学规划寻求函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在规定$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$必须满足一定条件时的极小(或极大)值. $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为"目标函数",必须满足的条件称为"约束条件". 如果目标函数和约束条件都是线性的,就叫线性规划,即

$$\min f(x) = \sum_{i-1}^{n} a_i x_i,$$

约束条件为

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}x_i = c_j \quad (x_i \geqslant 0; j = 1,2,\cdots,m; i \geqslant m).$$

线性规划问题在孕育整个运筹学的数学理论方面扮演了重要角色,并且至今仍是这门学科的中心课题. 线性规划的先驱者是前苏联数学家康托洛维奇,他在 1938 年就给出了像寻求用 8 种型号的机床完成 5 种类型产品加工的最合理运行计划这样的问题的数学处理,1939 年发表《生产组织与计划中的数学方法》,是最早的线性规划著作. 但康托洛维奇的工作当时在西方国家很少有人了解. 1947 年,美国的丹齐格又独立地发展了线性规划理论,线性规划这一名称就是他首先使用的. 特别是,丹齐格设计了一种叫单纯形法的算法,作为求解线性规划问题的计算工具. 我们知道,线性规划问题的约束条件在几何上对应于一个凸多面体(也叫多胞形),单纯形法的实质就是从多胞形的一个顶点出发,然后在多胞形的表面沿着边从一个顶点向另一个顶点移动,每到达一个新的顶点,按照一定的判别方法来决定究竟取哪条路线继续移动,直至达到最大(小)化顶点. 单纯形法在实用上非常有效,因而使线性规划论有了发展的基础.

从算法理论分析,单纯形算法属于指数型算法,即一种"非有效"算法. 由于在一些实际的线性规划问题中目标函数和约束条件往往涉及成千上万个变量,因此数学家们还希望能找到更快的计算方法. 直观上看,如果不是沿多胞形表面的边前进,而是直接穿过多胞形内部去寻找最优点应该更快. 因此从 1970 年代起,数学家们就开始寻找这样的"内点法". 起先这种努力并不顺利,数学家们虽然找到了几种内点法,但在实用中却没有显示出比单纯形法有优越之处. 1984 年,美国贝尔

实验室 28 岁的数学家卡玛卡(N. Karmarkar)终于发明了一种多项式时间的线性规划算法,这种计算方法在许多场合远远胜过了单纯形法.这种算法现在就叫"卡玛卡算法",卡玛卡为了得到他的算法,利用了与高维多面体有关的高度抽象的数学成果.

通过探讨目标函数和约束条件的不同情况,数学家们得到了线性规划论沿不同方向的推广.如果目标函数或约束条件中出现非线性表示,就称为非线性规划.1951 年库恩(H.W.Kuhn)和塔克尔(A.W. Tucker)对一般的约束非线性规划问题得到了局部极值点的"库恩-塔克尔条件",他们的论文标题即为《非线性规划》,可以看作是这一分支学科的发端.

继线性规划和非线性规划之后建立的另一个数学规划论同时也是运筹学的基本分支是动态规划,其奠基人是贝尔曼(R. Bellman,1920—1984).贝尔曼 1957 年发表的专著《动态规划》,标志着动态规划学科的建立.动态规划寻求使包含有时间变量的目标函数取最大或最小值的策略,即最优策略.贝尔曼提出最优化原理:"一个最优策略应具备如下性质,就是无论初始状态和初始决策如何,对于作为这一初始决策的结果所产生的状态,以后的决策序列必须构成最优策略".这一原理表达了动态规划的基本思想,因此动态规划从一开始就与控制理论密切相关.

12.3.3 控制论

控制论也是在第二次世界大战期间新兴的应用学科.控制论的创始人维纳(N. Wiener,1894—1964),在第二次世界大战中接受了一项与火力控制有关的研究:设计一种能有效地指挥高射炮的装置.飞机的高速度使以往的火力瞄准方法都显得陈旧无用.为了击中目标,要使投射物与射击目标在未来的某个时刻同时到达空间某处.因此必须找到某种能预测飞机未来位置的方法.这就是所谓的"预报问题"(predicting),是维纳控制论的主要来源之一.

控制论的另一个实际来源是通信"滤波问题"(filtering).在通信过

程中一个信息往往被外来干扰(噪声)所混杂.长期以来,设计一种能过滤噪声、复原信息的装置——滤波器,便是通信工程师和数学家合作的一个课题,维纳从1930年代起就对这方面的问题予以关注.

在维纳之前,预报问题与滤波问题一直被看作不同的问题分别讨论.维纳的独到之处恰恰在于他看出了这两类问题与其他一些类似的问题可以用统计的观点给出统一处理,从而建立起控制理论.维纳注意到,一项信息,不论它是以电的、机械的还是神经的方式传送,都可以看作依时间分布的可测量事件的序列,即统计学家所称的时间序列.预报问题,在数学上相当于用某种算符去运算某个信息的过去以预测其未来;而滤波问题则相当于用某种算符作用于被混杂的信息以恢复原来的信息.维纳认识到,在大多数情形,完全精确的预报与复原都是不可能的.他提出来的任务,是寻求问题的最优解."最优"的意义是使产生的结果与理论解之间的误差最小,而这里"误差"是用一个可以由已知时间序列的统计性质导出的均方差表达式来衡量.这样维纳就将预报、滤波等问题的求解归结为特定数学算符的最优设计,以及实现这些算符的物理装置的最优设计.这种设计过程,依赖于数学中变分法的极小化技术,同时取决于所处理信息的时间序列的统计学.维纳广泛地利用了调和分析与数理统计等数学领域中成熟的工具,建立起一整套最优设计的方法,逐步形成了系统的控制理论.

维纳的最优设计过程涉及到一个很重要的概念叫"反馈"(feedback),即将每一步输出的结果与理论值之误差重新作为输入对系统进行调节,使之实现最优状态."反馈"并不是一个新概念,但维纳指出过度的反馈会引起系统的激烈振荡,而这个问题以往没有解决.维纳依靠生理学家特别是墨西哥国立心脏学研究所的罗森勃吕特(A. Rosenblueth)等的帮助解决了这个问题,并对反馈机制作出了严格的解释,使之成为维纳控制论的一个中心概念.

为了建立控制论,维纳从1940年代初开始,与电工学家、生理学家、计算机设计家、通信工程师以及其他数学家展开了极其广泛的合作(在这些合作者中有一位是维纳的学生,来自中国的滤波器设计家李郁荣).1948年,维纳终于出版了他的名著《控制论》(Cybernetics),宣告了

控制论这门学科的诞生. 维纳在导言中说明 Cybernetics(控制论) 这个词是从希腊语 κυβερνήτης(掌舵人) 变来的, 船舶的操舵仪是反馈机构的一种最早形式.



图 12.4　维纳

维纳在发明控制论以前已经是大名鼎鼎的数学家了. 他发展了广义调和分析; 他对概率论布朗运动的研究使人们常常把这类运动称为"维纳过程", 等等. 这些纯数学的成果, 无疑是他建立控制论的坚实理论基础. 维纳本人后来谈到, 他之所以能够创立控制论, 一方面固然是他有机会接触和熟悉像火力控制这样的实际问题, 另一方面则在于他此前已发展了调和分析的理论工具. 维纳是数学史上的一名神童, 他 14 岁大学毕业, 同时成为哈佛大学研究生; 18 岁获得博士学位; 1933 年当选为美国国家科学院院士. 维纳不仅是一位杰出的学者, 他的正义感和国际精神也赢得了广泛的尊敬. 第二次世界大战期间, 他竭尽全力帮助遭希特勒迫害的犹太科学家到美国工作谋生; 他也是美国新英伦地区中国救援委员会的积极成员, 做了包括募捐在内的许多支援中国人民抗日战争的事情. 他认识到像控制论这样的新科学的发展, "对于为善与作恶, 都有无穷的可能性", 提出要"制止把这方面的发展交到那些最不负责任和最唯利是图的工程师手中去", 而把"个人的努力限制在 …… 远离战争与剥削的领域里". 因此, 尽管他在二战期间用自己的科学知识与聪明才智解决了许多与战争有关的难题, 但战后他却公开发表声明, 不再接受美国政府下达的有军事目的的研究任务, 这在当时引起了震动.

维纳的控制论通常被称为"经典控制论". 20 世纪 50 年代以后, 维纳的控制论被大大地推广发展, 而形成了研究系统调节与控制的一般规律的现代控制论. 现代控制论的奠基者主要有前苏联的庞特里亚金 (Л.С. Понтрягин, 1908—1988)、匈牙利裔美国数学家卡尔曼 (R.E. Kalman) 以及前面已提到的贝尔曼. 庞特里亚金 1958 年提出的极大值

原理,是确定系统最优控制的一种强有力的方法;卡尔曼 1960 年引进了状态空间法和"卡尔曼滤波"概念,卡尔曼滤波使人们能更有效地控制随机噪声,扩大了控制论的研究范围.庞特里亚金极大值原理、卡尔曼滤波以及前面已提到的贝尔曼动态规划最优化原理,是现代控制论的三大基石.

在 20 世纪形成的与数学密切相关的应用学科中,还应该提到信息论(information theory).信息论的创始人是美国人香农(C.E. Shannon),他 1948 年发表"通信的数学理论"等论文,以概率论为基础研究信息量与通信编码.信息论后来则发展成更一般的关于信息加工、存储与分析的理论.

12.4 计算机与现代数学

20 世纪中叶高速电子计算机的出现对现代数学的发展带来了深刻影响,这是 20 世纪数学区别于以往任何时代的一大特点.

12.4.1 电子计算机的诞生

用机器代替人工计算,是人类的长期追求.在这种追求中,数学家始终扮演着重要的并且常常是主要的角色.

古代的计算器械有算盘.罗马人使用一种带槽的金属算盘,槽中放有石子,上下移动进行计算.罗马人不用十进制,也没有位值概念,罗马算盘因运算笨拙而未能流行.十进位值制的珠算盘最早出现在中国,明代著作《魁本对相四言杂字》(1371) 中载有十档算盘图,实际发明年代应在此之前.明代珠算已相当普及,程大位(1533—1606) 的《算法统宗》,详述了珠算的制度和方法,标志了珠算的成熟.《算法统宗》远传日本,珠算在日本也很流行,不过算盘形式略有改变,称为"十露盘".

第一台能做加减运算的机械式计算机是由帕斯卡发明的(1642).帕斯卡的计算机有几台至今还保存在巴黎.莱布尼茨也敏锐地预见到了计算机的重要性,他指出:"把计算交给机器去做,可以使优秀人才从繁重的计算中解脱出来".莱布尼茨从 1671 年开始着手设计、制造他所

谓的“算术计算机”,并于 1674 年在马略特(E. Mariotte) 帮助下制成了一台能进行加减乘除四则运算的计算机. 但无论是帕斯卡还是莱布尼茨的计算机都不是很实用. 直到 1818 年,法国人托马斯(C. Thomas) 等才将莱布尼茨型的计算机改造为更实用的机型,并于 1821 年建厂投产.

使普通的四则运算机增带程序控制的功能,这是向现代计算机过渡的关键一步, 这一步是由英国数学家巴贝奇 (C. Babbage, 1792—1871) 首先迈出的. 巴贝奇 1812 年创建“剑桥分析学会”,力主引进欧洲大陆的分析成果,对 19 世纪英国数学的复兴贡献良多. 他 1816 年当选为皇家学会会员,1827 年出任剑桥大学卢卡斯教授. 巴贝奇很早就热衷于计算机制造. 1822 年制成一种叫“差分机”(difference engine) 的可运转的专用计算机,大约在 1834 年,又完成了他称之为“分析机”(analysis engine) 的新设计. 这种分析机由“加工部”、“存贮部” 以及专门控制运算程序的机构组成,这是世界上最早提出的通用程序控制数字计算机设计思想. 巴贝奇为了研制这种分析机付出了他后半生主要精力和财产,甚至不惜辞去荣誉极高的卢卡斯教授席位. 但当时能理解他的思想的人寥寥无几,真正支持巴贝奇制造分析机的只有 3 个人,一个是后来成为意大利总理的闵那布利(F. Menabrea),他将巴贝奇关于分析机的讲演整理成文并在意大利报纸上发表;另一位是拉甫雷斯夫人即艾达 · 拜伦(Ada A. Byron),著名诗人拜伦的独生女,她将闵那布利的文章译成英文,题名《关于巴贝奇先生发明的分析机简讯》,并加了许多有创见的注释,其中包括她为分析机编制的某些函数计算程序,开现代程序设计的先河;巴贝奇的儿子 —— 巴贝奇少将,在他父亲死后还为分析机奋斗了多年,他坚信:“总有一天,类似的机器将会制成,它不仅在纯数学领域中,还必将在其他知识领域中成为强有力的工具”!

由于时代的限制,巴贝奇分析机的纯机械的设计方案在技术实施上遇到了巨大的障碍. 巴贝奇通用程序控制数字计算机的天才设想,过了差不多 100 年才得以实现.

进入 20 世纪以来,科学技术的迅猛发展,带来了堆积如山的数据处理问题,尤其是第二次世界大战军事上的需要,更使计算工具的改进

成为燃眉之急.例如,二战期间美国阿伯丁弹道研究实验室每天要为陆军提供6张火力表,每张表都要计算几百条弹道.当时一个熟练的计算员用台式计算机计算一条飞行时间60秒的弹道就需要20多小时.阿伯丁实验室聘用了200多名计算员.在这种情况下一张火力表往往要算二、三个月,可见计算需要与计算能力之间的矛盾非常尖锐.要提高计算机速度,必须突破机械设计的框框.而恰好20世纪初电子管的发明[1905年J.A.弗莱明(英)发明二极管;1906年德福列斯特(美)发明三极管]和应用,为解决这一矛盾准备了技术条件.

人们起初是寻求用电器元件来代替机械齿轮.1941年,德国工程师朱斯(K.Zuse)制成第一台全部采用继电器的通用程序控制计算机,叫做Z-3.朱斯的工作在德国以外鲜为人知,Z-3在1944年被炸毁.因此在很长时间里,人们认为美国人艾肯(H.Aiken)在IBM公司支持下设计制造的MARK-Ⅰ(1944)是世界上第一台能实际操作的通用程序控制计算机.MARK-Ⅰ只是部分采用了继电器,1945—1947年间,艾肯又领导制成了一台全部采用继电器的计算机MARK-Ⅱ.

朱斯、艾肯等人设计制造的这批机电计算机从开始运作时差不多就已过时,因为继电器开关速度大约是百分之一秒,仍远不能满足需要.从20世纪30年代起,一些目光敏锐的学者已看到了用电子管来提高电子计算机速度的可能性(真空三极管栅极控制电流开关的速度比继电器快一万倍),并开始了制造电子计算机的努力,这导致了世界上第一台通用程序控制电子计算机ENIAC(Electronic Numerical Integrator and Computer)的诞生,而ENIAC的研制者,正是由前述阿伯丁弹道实验研究室与其合作单位宾夕法尼亚大学莫尔学院电工系人员共同组成的小组.其中起关键作用的人物,阿伯丁实验室的戈德斯坦(H.Goldstine)中尉,原是一位数学家,他与莫尔学院工程师莫克莱(J.W.Mauchly)等一起于1942年提出了一份题为《高速电子管计算装置的使用》的报告,实际上即ENIAC的初步设计方案.这在当时是一项冒险的计划,一方面耗资巨大,同时也没有必成的把握,因此遭到了强烈的反对意见.但在当时担任阿伯丁实验室科学顾问的美国领头数学家(普林斯顿高等研究院数学院创始人)韦布伦(O.Veblen,

1880—1960)的坚决支持下,美国陆军军械部决定批准这个项目.1945年底,第一台通用程序控制数字电子计算机 ENIAC 宣告竣工,这台机器 1947 年被运往阿伯丁,起初专门用于弹道计算,后经多次改进成为能进行各种科学计算的通用计算机.

ENIAC 是第一台能真正运转的电子计算机,但其基本结构与机电式计算机并无二致.这是一台庞然大物,占地面积达 170 平方米,耗电 150 千瓦,采用了 18 000 只电子管,工作时常因电子管烧坏而停机检修.而它最大的弱点,还在于其程序是“外插型”而非“存储型”.为了进行几分钟的运算,准备程序往往要花几小时,这使 ENIAC 由于采用电子管而获得的速度被大大抵消.如果这个缺陷不能克服,那么刚刚诞生的电子计算机就有可能夭折.恰恰在这个可以说关系到电子计算机存亡的问题上,又是数学家作出了关键的贡献,特别是冯·诺依曼(J.von Neumann,1903—1957).1944 年夏日的一天,在阿伯丁火车站,戈德斯坦中尉发现大名鼎鼎的数学家冯·诺依曼也在等车,在交谈中戈德斯坦向冯·诺依曼透露了 ENIAC 研制工作中的问题,立即引起了后者的关注.冯·诺依曼当时正在参与洛斯阿拉莫斯试制原子弹的工作,深受繁重计算之累,他从此便参加到 ENIAC 设计组中,并与设计组主要成员莫克莱、戈德斯坦和总工程师埃克特(W.J.Eckert)等一起深入分析了计算机的逻辑控制问题,于 1945 年 6 月提出了一份全新的通用电子计算机方案——EDVAC(Electronic Discrete Variable Automatic Computer)方案,其中一项重大的革新就是所谓程序存储的概念,即用记忆数据的同一记忆装置存储执行运算的命令.解决了程序存储不仅解决了计算与编程速度匹配的问题,还带来了在机器内部用同样速度进行程序逻辑选择的可能性,从而使全部运算成为真正的自动化过程.EDVAC 方案,史称“101 页报告”(因长 101 页而得名),它开辟了计算机发展史上的新时代,使现代计算机技术走上了康庄大道.EDVAC 方



图 12.5　冯·诺依曼

案立即产生了广泛影响,20世纪40年代末和50年代初,好几台存储程序计算机研制成功,EDVAC是其中的第4台,1952年造成.

除了冯·诺依曼,提出现代计算机设计思想的数学家还有图灵(A. Turing,1912—1954).图灵为了解决数理逻辑中的一个基本理论问题——相容性以及数学问题机械可解性或可计算性的判别,而提出了他的理想计算机理论.图灵的理想计算机现在也叫"图灵机"(如图12.6),是对"可计算性"这一概念的严格的数学定义.这种理想计算机由3个部分组成:一条带子,一个读写头和一个控制装置.带子分成许多小格,每小格可存一位数(0或1),也可以是空白.在任一时刻,读写头将处于有限多个不同状态中的一个(两个状态就够了).机器的运作是按逐步进行的方式,每一步由3个不同的动作组成.在任一确定时刻,读写头将视读带上的一个方格,它的行动由该格上的内容和机器的状态决定.根据这两个因素,机器抹去带上原有的符号;然后或者使方格保持空白,或者写上另外的(也可能是相同的)符号;然后让带子通过读写头,朝两个方向之一移动一个方格,最后机器进入另一个(也可能是相同的)状态.机器的行为自始至终是由一个指令集所决定,它明确地指示你每一步应执行哪3个动作.整个运作从读写头视读第一个方格数据开始,一旦计算结束,机器就进入一个特别的停止状态.运算过程的任何结果都记录在带子上.

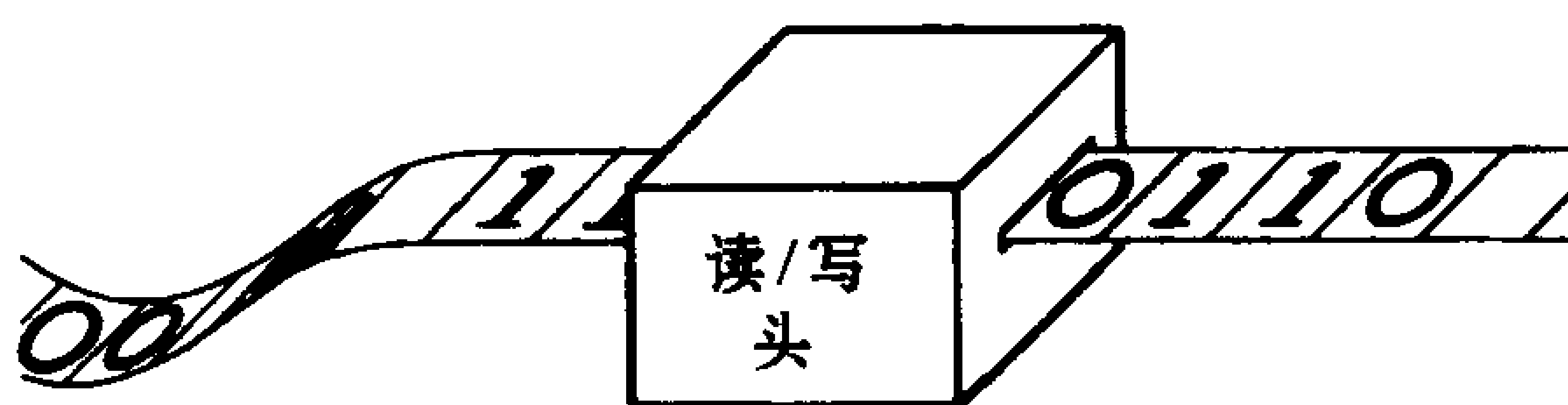


图12.6　图灵机

图灵证明了一条重要定理,即存在一种图灵机,它能模拟任一给定的图灵机.这种能模拟任一给定图灵机的理想计算机就是"通用图灵机".因此图灵机不仅给出了可计算性概念的严格定义,而且从理论上证明了制造通用数字计算机的可能性.值得注意的是,图灵机本身就是程

序存储型的.现在知道,图灵本人曾参与了英国“巨人号”(COLOSSUS)专用电子管计算机的研制,这种计算机用来破译密码,1943年制成,比ENIAC早些.但由于战争保密的缘故,英国政府直到20世纪70年代才公布了它的部分资料.

电子计算机的发明与发展再一次表明,人类计算工具的改进是离不开数学与数学家的贡献的.从冯·诺依曼和图灵的时代起,电子计算机已发展到第四代:

第一代	电子管	ENIAC	1945
第二代	晶体管	TX-2	1957
第三代	集成电路	IBM360	1964
第四代	超大规模集成电路		1971

所有这些计算机都是以冯·诺依曼的设计思想为基础,称为“冯·诺依曼机”.1980年代以后,人们又开始探索设计新型计算机,包括所谓第五代计算机(即智能计算机,这方面的计划已告一段落但未获成功),神经网络计算机,光学计算机,生物计算机,还有大规模并行计算机等等.毫无疑问,计算机的进一步发展,仍将借助于数学与数学家.

12.4.2 计算机影响下的数学

电子计算机是数学与工程技术相结合的产物,是抽象数学成果应用的光辉例证.反过来,计算机正日益成为数学研究本身的崭新手段,通过科学计算、数值模拟、图象显示等日益改变着数学研究的面貌.另一方面,计算机的设计、改进与使用提出的大量问题,又为数学中许多分支的理论发展注入了新的活力.

(一)计算数学的兴旺

计算机极大地扩展了数学的应用范围与能力,在推动科学技术进展方面发挥着越来越重要的作用.数值天气预报是利用计算机进行成功的科学计算的早期例子.19世纪末,挪威学者布耶肯思(V. Bjerknes,1862—1951)已指出天气预报的中心问题是求解有关的流体力学方程.1922年英国人理查森(L. F. Richardson)提出数值解法,并设想建

立一支由数学家指挥的巨大的天气预报人工计算队伍,他称之为“天气预报工厂”.但为了能完成计算任务,这个“工厂”需要大约 64 000 名“工人”!理查森只好望洋兴叹,寄希望于“朦胧的未来”.数值天气预报的梦想只有到电子计算机诞生后才得以实现.1950 年,冯·诺依曼领导的天气预报小组在第一台电子计算机 ENIAC 上完成了数值天气预报史上首次成功的计算.在 20 世纪下半叶,与气象学一样,一系列科学与工程领域的发展开始依赖于在计算机上进行的大规模科学计算.但这方面的实践使人们差不多从一开始就认识到:计算能力的提高固然要靠计算工具的改进,另一方面却也与所用计算方法的效能密切相关,计算方法对于计算速度的提高可以说与计算机硬件同等重要.这就导致了计算方法研究的空前活跃,并形成了一门以原来分散在数学各分支的计算方法为基础的新的数学分支 —— 计算数学.

计算数学不仅设计、改进各种数值计算方法,同时还研究与这些计算方法有关的误差分析、收敛性、稳定性等问题,冯·诺依曼也是这门学科的早期奠基人.他 1947 年与 H.戈德斯坦合作的论文《高阶矩阵数值求逆》,处理了高达 150 阶矩阵的求逆问题,特别是详细论述了误差分析,可以看作是现代数值分析的发端.1948 年,冯·诺依曼又发展了解非线性双曲型流体力学方程的差分方法,引进所谓的“人工粘性”项,可以在不明确假设冲击波存在的情况下计算流体力学方程.人工粘性差分法已成为现代流体力学中的主导数值方法之一.特别重要的是,冯·诺依曼在应用这一方法时首次提出了差分格式的稳定性问题.稳定性,与收敛性一样,现在是数值分析中最基本的概念.甚至早在第一台电子计算机投入运转之前,冯·诺依曼就已预察到:以往对于手工或延迟计算机设计的算法,对于高速电子计算机却未必最优.他与乌拉姆一起率先创造了一种全新的数值计算法 —— 蒙特卡洛(Monte Carlo)方法:将要求解的数学问题化为概率模型,在计算机上实现随机模拟以获得近似解.这种方法充分发挥了电子计算机处理大量随机数据的能力,是计算机时代新型算法的先锋.

在 20 世纪 50、60 年代,一批适于计算机应用的计算方法应运而生,它们中有:计算大型线性代数方程组的稀疏矩阵法(1960 年代)、与

计算机辅助设计密切相关的样条函数(1946、1962、1972),计算有限傅里叶级数的快速傅里叶变换(1965)等等.特别是,计算机给微分方程的离散化近似求解带来了无限的前景.古老的差分法由于计算机的高速度而获得了新的生命力.常微分方程数值求解中经典的龙格-库塔法(C. Runge,1895;W. M. Kutta,1901)被不断改进为多种变型以适应计算机上的大规模计算.在偏微分方程数值求解方面,拉克斯(P. Lax)与黎希特梅尔(R. D. Richtmyer)在1956年建立了一般差分格式的收敛性、稳定性等价定理(三类典型方程的典型差分格式的收敛条件在1928年已由R.库朗、K. O.弗里特里希和H.勒威给出),这使差分方法的蓬勃发展获得了稳固的基础.与此同时,另一种新的强有力的离散化方法——有限元方法被创造出来.有限元法是原先的里斯-伽廖金(W. Ritz,1908;Б. Г. Галёркин)变分方法与差分方法的有机结合.传统的变分方法由于采用整体逼近空间而与差分法绝然隔立.有限元法也从变分原理出发,但却将逼近空间分割成许多有限的单元进行分片插值,从而具有高度的灵活性和广泛的适用性.有限元思想最早可以追溯到R.库朗1943年的论文,1956年美国工程师特纳(M. J. Turner)、克劳夫(R. W. Clough)等从结构力学角度重新提出后,在20世纪60年代逐渐形成系统的方法.1965年中国数学家冯康(1920—1993)发表论文《基于变分原理的差分格式》,独立创造了有限元方法并奠定了其理论基础.

20世纪后半叶,一系列计算性应用学科如计算力学、计算物理、计算化学、计算考古学等的形成,已使计算数学成为目前最兴旺的数学分支之一.

(二)纯粹数学研究与计算机

随着计算机的发展,纯粹数学正在获得丰厚的回报.计算机已进入越来越多的数学领域,并且常常带来意想不到的成果.数学家只用纸和笔的时代将成为过去.

1976年9月,《美国数学会通报》宣布:伊利诺大学的哈肯(W. Haken)和阿佩尔(K. Appel)借助于电子计算机证明了地图四色定

理,这是用计算机解决重大数学问题的第一个鼓舞人心的范例.四色定理已有 100 多年的历史,在 19 世纪虽经德摩根、凯莱等大数学家的探讨仍悬而未决.20 世纪初,数学家们将四色定理的证明归结为寻找一组特殊图形 ——“不可避免可约图”(参见第 13 章) 的集合,但后来发现他们面临的是数以万计的图形,从而认识到了计算庞大的图形集合的能力可能是问题解决的关键.德国数学家希许(H. Heesch) 最先提倡利用计算机来攻克四色问题,他设计的算法被哈肯和阿佩尔等人改进后终于在电子计算机上成功实施.最后的计算花费了 1200 多个计算机小时.

哈肯和阿佩尔两位数学家关于四色定理的证明,其主要的和关键的部分是依靠计算机完成,整个过程涉及的巨量计算,对它进行逐步的人工检验已不可能.这一切意味着自电子计算机诞生以来就一直在酝酿着的数学变革开始了.尽管从一开始就存在着对哈肯 - 阿佩尔证明方式的怀疑,但在理论数学研究中使用计算机已成不可逆转之势.越来越多的数学家认识到:计算机的应用不仅大大改变了数学研究的方式,而且从根本上改变着证明概念本身.对产生“证明” 的计算机程序的检查,也应该被允许看作是一种有效的数学证明.

在计算机上进行人工不可能完成的巨量计算,不仅使数学家们得以证明一些已知的困难定理,而且还帮助他们猜测新的事实、发现新的定理.通过计算归纳数学定理,然后再用演绎方法加以证明,数学家们过去也常用这种方法,特别是在数论中,高斯、勒让德就是通过大量计算来猜测素数分布公式的.这种方法的威力无疑由于电子计算机无可比拟的计算速度和图象显示功能而极大地加强了.这方面最突出的例子有孤立子(soliton) 和混沌(chaos) 的发现,它们都可以看作是 20 世纪的重大数学成就(参见第 13 章),其中孤立子是非线性波动方程的一类脉冲式行波解,1965 年克鲁斯卡尔(M.D. Kruskal) 和萨布斯基(N.J. Zabusky) 通过计算机数值试验意外地发现:两个这样的波相互碰撞后各自保持波形、速度不变,在计算机屏幕上显示出来的这种与人们以往的直觉猜测相反的波动性质,在随后的二、三十年里掀起了研究孤立子的热潮;关于混沌的研究更是典型的计算机数学.复动力系统的迭代过程很早就引起数学家们的浓厚兴趣.法国数学家朱利亚(G.M. Julia,

1893—1978)和法图(P. J. L. Fatou, 1878—1929)曾率先研究过动力学定律 $f(x) = x^2 + c$(x 和 c 均取复值,c 为参数)产生的图象,并指出了参数 c 的选择对图象的性质影响至关重要. 但他们的工作不得不半途而废,一个重要的原因是无法精密地画出所研究的对象,即使是对于 $f(x) = x^2 + c$ 这样较简单的非线性系统,对不同参数 c 迭代的计算量也大得惊人. 直到 1980 年,朱利亚的学生蒙德尔布罗(B. Mandelbrot)才利用新型超微机画出了第一批这样的图象,这些图象对于不同的参数值 c 展示出丰富多采的结构. 特别是蒙德尔布罗通过计算机迭代发现了对某些参数值 c 图象呈现的严重混乱以及隐藏在这种混乱背后的图案,即动力学过程的混沌行为. 这样,蒙德尔布罗用计算机开辟了一个新的数学分支 —— 混沌动力学,一个真正属于计算机时代的数学分支,它不仅已成为描述自然界不规则现象的数学工具,而且它所产生的那些变幻无穷、精美绝伦的混沌图案,还堂皇地进入了现代艺术的殿堂.

(三)计算机科学中的数学

自从第一台电子计算机制造成功以来,计算机有了惊人的发展. 体积缩小到原先的数万分之一,速度提高了几百万倍(巨型机计算速度甚至已达到每秒千、万亿次),功能也大大突破了单纯数字计算的范围. 计算机的这种变革与进步,从另一个方向刺激着理论数学的发展. 现代计算机科学不仅离不开数理逻辑,而且要借助数论、代数学、组合数学乃至代数几何等众多数学分支的概念、方法与理论,同时新型计算机的研制还呼唤着新的数学思想. 这是一个广大的探索领域,以下仅以组合数学、模糊数学和机器证明为例来说明这方面的发展.

1. 组合数学　组合数学也称组合分析或组合论,有着古老的起源. 中国古代传说中有“洛书图”,东汉郑玄(129—200)注《周易》则称“九宫数”,这是最早的(3阶)幻方(图12.7). 到宋代杨辉的著作(《续古摘奇算法》,1275)中已出现高达10阶的幻方. 杨辉与朱世杰以及比他们略早的印度数学家婆什迦罗等都得出了一系列有意义的组合恒等关系. 中世纪的

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 12.7

阿拉伯数学家也表现出对排列与幻方的浓厚兴趣.不过,近代意义的组合数学则是从莱布尼茨 1666 年发表的《组合的艺术》(De Arte Combinatoria) 为起点,"组合"这个名词正是他首先引进的.18、19 世纪的数学家提出了一系列著名的组合数学(包括图论)的问题,如:

哥尼斯堡七桥问题(欧拉,1736,参见 11.2.4);

36 军官问题(欧拉,1781):36 名军官来自 6 个不同的军团,每个军团 6 名且分属 6 种不同的军阶.问能否将他们排成一个方阵,使得每行每列的 6 名军官正好来自 6 个不同军团?

柯克曼女生问题(T. Kirkman,1850):女教师要为其女学生安排下午散步的日程表,15 人分成 5 组,每组 3 人,使得一周 7 个下午每两位女生恰好见一次面;

哈密顿环球旅行问题(W. R. Hamilton,1856):已知一个由一些城市和连结这些城市的道路组成的网络,问是否存在一条旅行路线,使起点和终点都在同一个城市,而其他每个城市恰好都经过一次.

早期组合数学这类带趣味性和益智魅力的问题,逐渐与数论、概率统计、拓扑学以及线性规划等领域的问题交织在一起,而显示出理论和应用上的重要价值.特别是在 20 世纪下半叶,与电子计算机发展相结合使古老的组合数学获得了新的生机.

现代组合数学研究任意一组离散性事物如何按一定规则安排成各种集合,包括这种安排的存在性、计数、构造与优化等.由于对象的离散特性,各种组合问题的计算量往往都十分巨大,高速计算机自然为这些问题的求解提供了有力武器,在计算机上解算各种组合问题的实践对理论计算机科学,特别是其中与算法有关的部分,如算法有效性(或称计算复杂性) 理论的研究产生了深远的影响.

以"旅行推销员" 问题为例,这问题是问:一个旅行推销员赴若干城市推销商品,怎样才能遍历所有的城市并使所走的路程最短?最简单的想法是列举所有可能的路线并算出总路程,然后加以比较而选出最小路程的路线.这个原则上可以在计算机上实现的算法,当城市超过一定数时却行不通:对 n 个城市,总共有 $n!$ 条路线,这将导致一个"指数时间算法",比如 $n=20$ 时,要算出所有可能路线中的最短路线,即使

用一台每秒上亿次的计算机也需要几百年时间!

在计算复杂性理论中,只有多项式时间算法才被认定为有效算法,不是多项式时间的算法则被称为指数时间算法,或“非有效算法”.可以用多项式时间算法求解的问题被称为 P 型问题.就旅行推销员问题而言,它可能是P型问题,也可能不是P型问题,迄今尚无定论.从1962年以来,人们在一些特殊情形解决了旅行推销员问题,如 1963 年,IBM公司的卡普(R. Karp) 等发明了一种“分支界限法”,并用它在计算机上在几分钟内解决了 40 个城市的推销员问题.目前对不超过 500 个城市的任何特殊情形都已证明了旅行推销员问题的可解性.但旅行推销员问题一般解法的存在性至今仍未解决.

不过已经知道旅行推销员问题是属于所谓的 NP 型问题,即“非确定多项式时间算法”问题,也就是可以通过一次或多次“正确”的猜测而在非确定型图灵机上用多项式时间求解的问题.NP型问题是一个高度抽象但却有重要意义的概念,因为许多尚未找到有效算法的问题被证明是属于 NP 型,NP 为大量实际问题的计算机求解提供了理论框架.另外,1971 年库克(S. Cook) 证明了存在着一类特殊的 NP 型问题,他称之为 NP 完全性问题,对任意一个 NP 完全性问题找到了多项式时间算法就可以产生一切其他 NP 问题的多项式算法.可以证明,旅行推销员问题就属于 NP 完全性问题,后来又证明了上千个组合问题都属于 NP 完全性问题.

尽管在直觉上NP型问题与P型问题有区别,但至今却未能找到一个反例,也就是未能找到一个属于 NP 型但却能证明不是 P 型的问题!类 NP 与类 P 是否实际上相同?即是否任一 NP 型问题实际上都可用多项式时间算法求解?这个以“NP = P” 著称的问题,已经成为当今计算机科学与数学中最重要的未解决问题之一,对它的研究,几乎涉及到所有的数学分支.

我们已经看到:组合数学中计算机的应用怎样推动了诸如算法有效性这样的计算机科学问题的研究.另一方面,由于计算机结构及其处理对象的离散特性,作为离散数学重要组成部分的组合数学在计算机科学中必然地获得了广泛的应用,这也是这门源于数学游戏问题的数

学分支越来越受到重视的一大原因.

2.模糊数学 1965 年,美国数学家扎德(L.A.Zadeh)发表论文《模糊集合》(Fuzzy Sets),开辟了一门新的数学分支 —— 模糊数学.

模糊集合是经典集合概念的推广.在经典集合论(康托尔集合论)中,每一个集合都必须由确定的元素构成,元素对于集合的隶属关系是明确的.这一性质可以用特征函数 $\chi_A(x)$ 来描述:

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & (x\in A),\\ 0, & (x\notin A).\end{cases}$$

扎德将特征函数改成所谓的"隶属函数"$\mu_A(x)$:$0\leqslant\mu_A(x)\leqslant 1$,这里 A 称为"模糊集合",$\mu_A(x)$ 称为 x 对 A 的"隶属度".经典集合论要求隶属度只能取 0,1 二值,模糊集合论则突破了这一限制,$\mu_A(x)=1$ 表示百分之百隶属于 A;$\mu_A(x)=0$ 表示不属于 A;还可以有百分之二十隶属于 A、百分之八十隶属于 A,…… 等等.这样模糊集合对由于外延模糊而导致的事物是非判断上的不确定性提供了数学描述.

由于集合论是现代数学的重要基石,因此模糊集合的概念对数学产生了广泛的影响,人们将模糊集合引进数学的各个分支从而出现了模糊拓扑、模糊群论、模糊测度与积分、模糊图论等等,它们一起形成通常所称的模糊数学.

实际上,模糊性是事物复杂性表现的一个方面,随着电子计算机的发展以及它对日益复杂的系统的应用,处理模糊性问题的要求也比以往显得突出,这是模糊数学产生的背景.由于人脑的思维包括有精确的与模糊的两个方面,因此模糊数学在人工智能模拟方面具有重要意义.模糊数学已被应用于专家系统、知识工程等方面,与新型计算机的研制有密切的关系.

模糊数学是 20 世纪数学发展中的新事物,它在理论上还不够成熟,方法上也未臻统一,它将随着计算机科学的发展而进一步发展.

3.机器证明 计算机发展的最终目标是模拟人类智能,用机器代替人的思维,而不仅仅是进行计算.20 世纪展现了制造人工智能机器的伟大曙光,但在硬件突破上还有漫长的道路要走.1980 年代主要由日本学者发起的制造第五代智能计算机的大胆计划令人鼓舞,但巨大

的技术困难表明这方面的条件尚不成熟.此后科学家们将目光更多地倾注于智能软件,并取得了长足的进步.

定理机器证明在人工智能的发展中有重要影响.这里所说的机器证明是指针对一整类问题的一般的机械化证明,而有别于像四色定理证明中那样通过完成必要的巨量数值或组合计算来得出定理的证明.机器证明定理的早期开拓者有波兰数学家塔斯基(1948)和美籍中国数学家王浩(1958)等.王浩在 1960 年公布了他的成果,在一台速度不高的计算机(IBM704)上证明了罗素 - 怀特黑德《数学原理》中一阶逻辑部分的全部 350 条定理.

上述关于机器证明的早期工作都是基于数理逻辑与推理的研究.1976 年以后,中国数学家吴文俊开辟了一条定理机器证明的代数化途径.吴文俊的方法将要证明的问题归结为纯代数问题,并有一整套高度机械化的代数关系整理程序.利用这一方法已经实现了初等几何主要定理的机器证明(1977),并且证明了初等微分几何中一些主要定理的证明也可以机械化.吴文俊的方法形成了中国特色,国际上称为"吴方法",使中国学者在数学机械化领域处于领先地位.

定理机器证明在 1980 年代以后又有了很多的推进.

早在 20 世纪 70 年代,数学家中已经有人展望"将来会出现一个数学研究的新时代,那时计算机将成为数学研究必不可少的工具"[①].20 世纪下半叶计算机与数学科学之间的相互作用与相互影响充分表明,数学研究的这一新时代已经开始来临.

---

① S.乌拉姆:《一个数学家的经历》,上海科学技术出版社.

20 世纪数学概观(Ⅲ) 现代数学成果十例

13

现代数学常常被比喻为一棵枝繁叶茂的大树,我们在前两章中力图描绘出这棵大树的轮廓,本章则要通过选讲一些有代表性的成果来进一步反映 20 世纪数学的风貌与特征.

13.1 哥德尔不完全性定理(1931)

如 11.4 所述,对基础的空前深入的探讨是 20 世纪纯粹数学的趋势之一,而这种探讨的一个重要动因就是相容性问题.哥德尔不完全性定理,正是研究相容性问题而引出的非常深刻的思维成果.



图 13.1 哥德尔

1931 年,奥地利数学家哥德尔(K. Gödel,1906—1978)发表题为《论〈数学原理〉及有关系统中的形式不可判定命题》(Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme)的论文,其中证明了一条定理:

任一足以包含自然数算术的形式系统,如果是相容的,则它一定存在有一个不可判定命题,即存在某一命题 A 使 A 与

A 的否定在该系统中皆不可证.

系统中存在不可判定的命题也叫该系统的“不完全性”,因此哥德尔的上述结果通常被称为“哥德尔第一不完全性定理”,第一不完全性定理表明:任何形式系统都不能完全刻画数学理论,总有某些问题从形式系统的公理出发不能解答.情形甚至更糟,在第一不完全性定理的基础上,哥德尔进一步证明了:

在真的但不能由公理来证明的命题中,包括了这些公理是相容的(无矛盾的)这一论断本身.也就是说,如果一个足以包含自然数算术的公理系统是相容的,那么这种相容性在该系统内是不可证明的.

这就是所谓“哥德尔第二不完全性定理”,第一不完全性定理与第二不完全性定理合称“哥德尔不完全性定理”.它们揭示了形式化方法的不可避免的局限性,使希尔伯特证明形式系统相容性的方案受到沉重打击.

哥德尔不完全性定理是属于某种否定性的结果,但这项否定性结果却带来了数学基础研究的划时代变革.

首先,哥德尔不完全性定理破天荒地第一次分清了数学中“真”与“可证”是两个不同的概念.可证明的命题固然是真的,但真的命题却不一定是可证明的.对于形式系统来说,“可证”是可以机械地实现的,“真”则需要进一步的思想能动性以及超穷工具.这一切突破了人们对数学真理的传统理解,将对数学真理的认识推向了崭新的层次.

其次,哥德尔在不完全性定理的证明中提出的“原始递归函数”概念,成为算法理论或可计算理论的起点(参见 11.4),特别是它引导图灵提出了理想计算机概念,为电子计算机的研制提供了理论基础(参见 12.4).

另外,虽然哥德尔定理指出了形式化数学的局限性,但这并不意味着公理化方法的消亡.相反,哥德尔的结果极大地促进了希尔伯特“证明论”的发展.由于指出了有限方法的不可能,人们在放宽工具限制的情况下,创造了“超限归纳法”等一些新方法(参见 11.4),解决了一批证明论问题,使数理逻辑在新的起点上获得了新的发展.

哥德尔本人说过:“至于说到我的否定结果,我觉得它的重要性在

于以下的事实:在很多情况下,它能够判断或猜测希尔伯特方案的某个特殊部分,能否在给定的元数学假设下彻底进行”.“基于形式化的研究方法,能否对古典数学的相容性进行构造性证明,以及如果可能的话,又可以解决到什么程度,这样一个问题并没有解决”.作为20世纪最发人深省的数学定理之一,哥德尔不完全性定理所引起的理论思考,一方面已结出丰硕的成果,一方面却又余蕴无穷.哥德尔不完全性定理由于其对数学基础产生的巨大影响而在20世纪数学史上写下了浓重的一笔.

哥德尔于1940年离开纳粹统治下的维也纳移居美国,在普林斯顿高等研究院工作 —— 直到1978年去世.哥德尔是爱因斯坦最亲密的朋友.

13.2 高斯 - 博内公式的推广(1941—1944)

从局部到整体,从低维到高维,这是20世纪数学在许多领域表现出来的趋势.微分几何中高斯 - 博内公式的推广,提供了这方面的典型例子.

平面上任一三角形三内角和恒等于 π.对于一般曲面上由三条测地线构成的三角形(图13.2),其内角和则满足如下高斯公式

$$\iint_A k\,\mathrm{d}\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi.$$

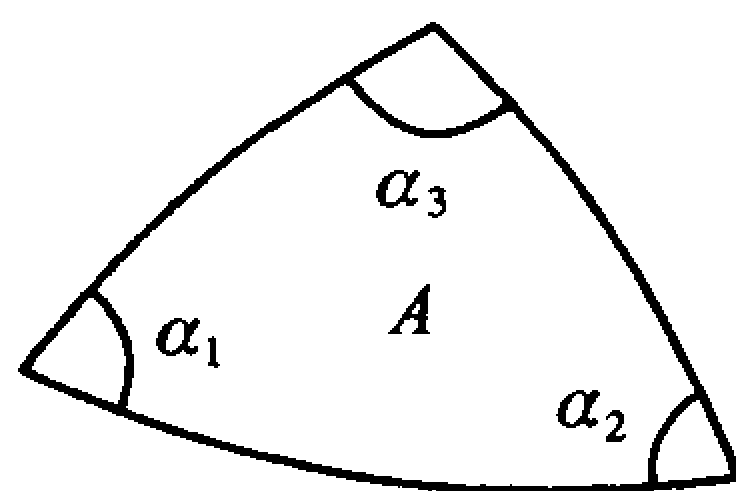


图13.2

这里 $\iint_A k\,\mathrm{d}\sigma$ 表示高斯曲率 k 在三角形 A 上的积分,α_1、α_2、α_3 为测地三角形三内角值.这一公式是高斯在1827年证明的.1844年,法国数学家博内(P.-O. Bonnet,1819—1892)将这一公式推广到一般曲面上任意闭曲线 C 围成的单连通区域情形:

$$\int_C \rho_g \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{m}(\pi - \alpha_i) + \iint_D k\,\mathrm{d}\sigma = 2\pi.$$

这里$\int_C \rho_g \mathrm{d}s$ 表示测地曲率沿闭曲线C 的线积分,$\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$是组成C的各弧段连接点上的内角值,D是C所围区域.此公式也叫高斯-博内公式,在定向闭曲面情形,它变为

$$\iint_D k\,\mathrm{d}\sigma = 2\pi\chi(D).$$

这里$\chi(D)$表示D的欧拉示性数,它等于1减去曲面上洞的个数,是通常多面体欧拉数$v-e+f$(欧拉,1750,其中的v、e、f分别为多面体顶点数、棱数和面数)的推广.

二维紧致黎曼流形上的高斯-博内公式是经典微分几何的一个高峰.其后一个世纪内数学家们力图将它推广到高维紧致黎曼流形上去,首先获得成功的是韦依(A. Weil),1942 年他和阿伦道弗(C. Allendoerfer)证明了任意黎曼流形上的高斯-博内公式,但他们的证明依赖于球丛结构,这是非内蕴结构.高维高斯-博内公式的第一个内蕴证明是由中国数学家陈省身给出的,陈省身 1944 年发表的论文《对闭黎曼流形高斯-博内公式的一个简单的内蕴证明》,率先采用了内蕴丛,即长度为 1 的切向量丛,攻克了这个“几何学中极其重要和困难的问题”.

高斯-博内公式将黎曼流形的整体拓扑不变量(欧拉示性数)与它的微分几何不变量(高斯曲率)联系起来,因此具有基本的意义,整体微分几何的许多工作都是围绕这一公式展开的.高维高斯-博内公式的内蕴证明,则成为现代微分几何学的出发点.特别是,陈省身的内蕴证明像一把钥匙,打开了示性类进入微分几何的大门,示性类作为联系微分几何与代数拓扑的基本不变量,几乎主导了 20 世纪后半叶微分几何的发展.示性类本来是拓扑学中的概念,除了陈省身与惠特尼,对示性类研究的主要贡献者还有前苏联数学家庞特里亚金和中国数学家吴文俊等.庞特里亚金定义了“庞特里亚金示性类”.吴文俊首先通过斯廷洛德运算定义了“吴类”,并给出了计算斯蒂菲尔-惠特尼示性类的公式,该公式现以“吴公式”著称.

13.3 米尔诺怪球(1956)

我们已经知道,拓扑学的一个基本对象是流形.流形的研究与物理应用密切相关.物理学家感兴趣的不是空的流形,而是所谓微分流形,即可以在其上建立整体一致的微分技巧的流形.因此,什么样的流形才是微分流形?给定一个微分流形,是否只有一种还是有多种方式赋予它微分结构?这不仅是微分拓扑学的一个基本课题,同时也成为物理学家们关注的问题.

在1950年代中以前,数学家们已经知道所有的一、二、三维流形都是微分流形,而且本质上只有一种微分结构.一般猜测对高维情形也能证明同样的结论.但1956年,美国数学家米尔诺(J. W. Milnor)却证明了:七维球面上可以建立28种不同的微分结构.这一意外的发现使人震惊,七维球面被称为"怪球",现在就以"米尔诺怪球"著称.

米尔诺怪球的发现引起了微分拓扑学研究的高潮.一系列可以赋予多种微分结构的高维球面被发现,到1970年代,对所有五维和高于五维的流形都可以进行分类,特别是能够对微分流形与非微分流形作出区分.1980年代初,四维流形遂成为关注焦点:是否所有的四维流形也像低维(一、二、三维)流形一样,都是微分流形并且只容许一种微分结构?这个众所瞩目的问题在1981年被美国数学家弗里德曼(M. Freedman)解决,弗里德曼证明了存在着不是微分流形的四维流形,就是说四维流形在性质上与二、三维流形有本质不同.

由米尔诺怪球触发的流形拓扑学的发展可以说奇峰迭起.比弗里德曼非光滑四维流形更令人震惊的结果在等待着数学家.

前面我们涉及的都是一般的抽象流形.人们对具体的流形特别是n维欧几里得空间$\mathbf{R}^n$更有兴趣.在1980年以前,数学家们已经证明了所有的$\mathbf{R}^n(n\neq 4)$都是微分流形,并且只能用一种方式赋予微分结构.唯独对于$\mathbf{R}^4$的情形,却一直不能证明其微分结构的唯一性.$\mathbf{R}^4$是现实时空宇宙的数学模型,对于大多数数学家来说,$\mathbf{R}^4$上存在不同寻常的微分结构是不可思议的.然而1982年,英国牛津大学一位初出茅庐的

数学家唐纳尔逊(S. Donaldson)竟证明了：$\mathbf{R}^4$ 上确实存在着与通常不同的微分结构，也就是说世界数学家和物理学家们从牛顿时代以来所惯用的微分结构并不是唯一可能的微分结构！不久又有人证明了 $\mathbf{R}^4$ 上可以有无穷多种微分结构，通常的微分结构只不过是其中之一.

究竟是什么原因使得四维时空 $\mathbf{R}^4$ 与众不同，表现出上述特性呢？能不能最终证明迄今惯用的微分运算是正确的？数学家们目前还不能回答这个困难复杂而又事关重大的问题.

13.4　阿蒂亚 - 辛格指标定理(1963)

如果要举一项具体的结果来说明现代数学的统一性，阿蒂亚 - 辛格指标定理是很合适的例子.

阿蒂亚 - 辛格指标定理是古典黎曼 - 罗赫定理的推广. 我们知道，在复变函数论中，每个解析函数都有与它相应的黎曼曲面. 曲面的结构是拓扑学研究的对象，因此，函数论与拓扑学之间是存在联系的. 古典的黎曼 - 罗赫定理就是刻画黎曼曲面的这种二重性质. 设有闭黎曼曲面 M，问在其上至多有有限多个极点的线性无关的亚纯函数有多少？黎曼首先发现这些线性无关亚纯函数的个数与曲面的拓扑不变量亏格有关(闭黎曼曲面即一维复流形，在拓扑上相当于连接有若干个柄的球面，亏格就是柄的个数)，并在二者之间建立了一个不等式，在至多有 n 个一阶极点的情形，黎曼不等式相当于：

$$\dim F \geqslant 1 + n - g.$$

此处 $\dim F$ 是 M 上的亚纯函数集合 $F = \{f : f$ 在点 $a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 处有不超过一阶的极点，并且此外没有极点$\}$ 构成的向量空间的维数，g 是 M 的亏格. 1864 年，黎曼的学生罗赫(G. Roch)在这个不等式中添加一项而使它变成了等式：

$$\dim F - \dim D = 1 + n - g,$$

添加项 $\dim D$ 表示在每点 a_i 处有不小于一阶零点的全纯微分构成的向量空间 D 的维数. 这个等式就是黎曼 - 罗赫定理. 当然一般情形的黎曼 - 罗赫定理具有更为复杂的形式.

黎曼-罗赫定理是一条分析定理,但它所阐述的结论表明,分析量可以仅仅通过拓扑量来计算.进入20世纪以后,数学家们开始了将黎曼-罗赫定理推广到高维紧复流形的艰巨努力.1951年,日本数学家小平邦彦首先利用调和积分将它从曲线(一维复流形)推广到曲面(二维复流形).1954年,德国数学家希策布鲁克(F. Hirzebruch)用层的语言表述并证明了一般代数簇上的黎曼-罗赫定理.随后又引起了一系列新的研究和推广,其中最重要的便是英国数学家阿蒂亚(M. F. Atiyah)和美国数学家辛格(I. M. Singer)证明的"指标定理",从紧致黎曼流形上向量丛间椭圆算子"指标"(index)的角度,得到了非常一般的公式:

$$\dim\ker\Delta - \dim\operatorname{coker}\Delta = 1 - g.$$

其形式与古典黎曼-罗赫定理相仿,但复变函数的微分被一般的微分算子Δ代替了(kerΔ表示Δ的"核",cokerΔ表示"余核").阿蒂亚-辛格指标定理以希策布鲁克等人的黎曼-罗赫定理为其特例,同时还统一了其他若干著名的经典定理.阿蒂亚-辛格指标定理不仅在内容上沟通了分析与拓扑学两大领域,而且在研究方法上涉及到分析、拓扑、代数几何、偏微分方程、多复变函数等许多核心数学分支,又在物理学杨-米尔斯理论中获得了重要应用,因而被誉为现代数学重大成就之一.

13.5 孤立子与非线性偏微分方程(1965)

对非线性数学问题的日趋重视,也是20世纪尤其是后半叶数学发展中的一个特点.这里以孤立子方程的研究为例来说明这一特点.

在20世纪上半叶,线性偏微分方程理论获得了很大的进展.相比之下,非线性方程的研究却困难重重,进展缓慢,这种状况在20世纪60年代以后有所改变,这与所谓"孤立子"方程的研究有关.

早在1834年,英国工程师拉塞尔(S. Russell)骑在马背上追踪观察运河中船只突然停止时激起的水波,发现了他称之为"孤立波"的现象.拉塞尔将这种水波形容为"一个滚圆而平滑,轮廓分明的巨大孤立波峰,以很快的速度离开船头,向前运动着.在行进中它的形状和速度

并没有明显的改变,……",并抱怨当时的数学家未能提供描述这种孤立波的工具.直到 1895 年,荷兰数学家柯特维格(D.J.Korteweg)和法国数学家德弗里斯(G.de Vries)才给出了孤立波现象较满意的数学模型,这是一个非线性偏微分方程:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}\eta^2+\frac{2}{3}\alpha\eta+\frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right\},$$

其中 x 是沿河道的一维坐标,t 是时间,$\eta(x,t)$ 是高于平衡水面的波峰高度,l 为水深,g 为重力加速度,α、σ 是有关常数.

这方程就叫柯特维格 - 德弗里斯方程,简称 KdV 方程,但 KdV 方程的研究在半个多世纪内停滞不前.1960 年,加德纳(C.S.Gardner)等人又重新发现这个方程,并引起人们注意,使 KdV 方程成为可以描写许多现象的数学物理基本方程.

KdV 方程存在着拉塞尔所观察到的"孤立波"解,即在行进中波形不随时间而改变.可以证明孤立波的传播速度与其振幅成正比,因此较大的波比较小的波运动得快.一个自然的问题是:两个不同的孤立波经叠加后还是原方程的解吗?由于 KdV 方程的非线性,人们普遍猜测答案是否定的.但 1965 年,美国学者克鲁斯卡尔(M.D.Kruskal)和扎布斯基(N.J.Zabusky)将描述孤立波的函数表示为:

$$u(x,t)=3D\operatorname{sech}^2\frac{\sqrt{D}}{2}(x-Dt),$$

并在计算机上用数值模拟的方法详细考察了等离子体中孤立子碰撞的非线性作用过程,却得出了相反的发现:两个孤立波碰撞后仍表现为两个形状不变的孤立波!于是他们就称其为"孤立子"(soliton),意思是具有某种粒子的行为和特性.KdV 方程从此又被称为"孤立子方程".后来人们发现光纤通信、神经细胞脉冲传导、木星红斑活动等都存在孤立子性质,孤立子作为一种普遍存在的非线性现象引起了科学家们极大的兴趣.

1967 年,加德纳、格林纳(J.M.Greene)、克鲁斯卡尔和缪勒(R.M.Miure)等证明了:当薛定谔方程的位势系数按孤立子方程演化时,特征值保持不变.以此为突破点,他们利用特征值问题的成果,发展出一套"散射反演方法",成功地解出了 KdV 方程.后来人们进一步发现,散

射反演方法经过推广可以用来求解一系列在应用中十分重要的非线性偏微分方程,如正弦－戈登方程 $u_{xt}=\sin u$、非线性薛定谔方程 $iu_t+u_{xx}+\alpha|u|^2u=0$ 等等,掀起了非线性方程研究的热潮.

13.6　四色问题(1976)

四色问题也叫四色猜想或四色定理,1852 年首先由一个英国青年大学生古德里(F. Guthrie) 提出. 古德里在给一张英国地图着色时猜测:为了给任意一张平面地图着色,并使任何具有公共边界线的区域颜色不同,至多需要 4 种颜色. 古德里将这一发现告诉了他的老师、著名数学家德摩根,希望帮助找到证明. 但德摩根也不能证明,转而请教发明四元数的哈密顿,却未引起后者重视. 1878 年,凯莱对此问题进行一番思考后,相信这不是一个可以等闲视之的问题,于是在《伦敦数学会文集》上发表了一篇《论地图着色》的文章. 凯莱的文章在当时掀起了一场四色问题热. 第二年,一位叫肯泊(A. Kempe) 的英国律师宣布证明了四色猜想,他的论文发表在西尔维斯特(J. Sylvester,1814—1897) 主编的《美国数学杂志》上,但 11 年以后,一位叫希伍德(P. Heawood) 的青年人指出了肯泊的证明中有严重错误. 希伍德对肯泊的方法作了适当补救后,用它证明了五色定理(即用 5 种颜色一定可以区分地图上有公共边界线的相邻区域). 希伍德一生坚持研究四色问题,但始终未能证明这条定理.

四色问题有一个令人迷惑的地方:在更复杂的曲面上,问题的解决反倒容易. 如希伍德曾证明了环面的七色定理. 到 1968 年,数学家们已解决了除平面和球面以外所有曲面上的地图四色问题,恰恰是平面和球面(地球仪) 这种最简单的情形,却呈现出奇特的困难.

肯泊的证明虽然失败,但其中却提出了后来被证明对四色问题的最终解决具有关键意义的两个概念,一个是“不可避免构形集” 或简称为“不可避免集”;另一个是所谓的“可约性”.

不可避免构形集是具有这样性质的一组图形:任何一张平面图至

少包含其中一个作为其一部分.肯泊证明了任何一张正规地图[①]中,一定存在着至多有五个邻国的国家,也就是说在图 13.3(i)、(ii)、(iii)、(iv)所示图形中,至少有一种会在该地图某处出现.这样,图 13.3(i)、(ii)、(iii)、(iv) 就被称为“不可避免构形集”.

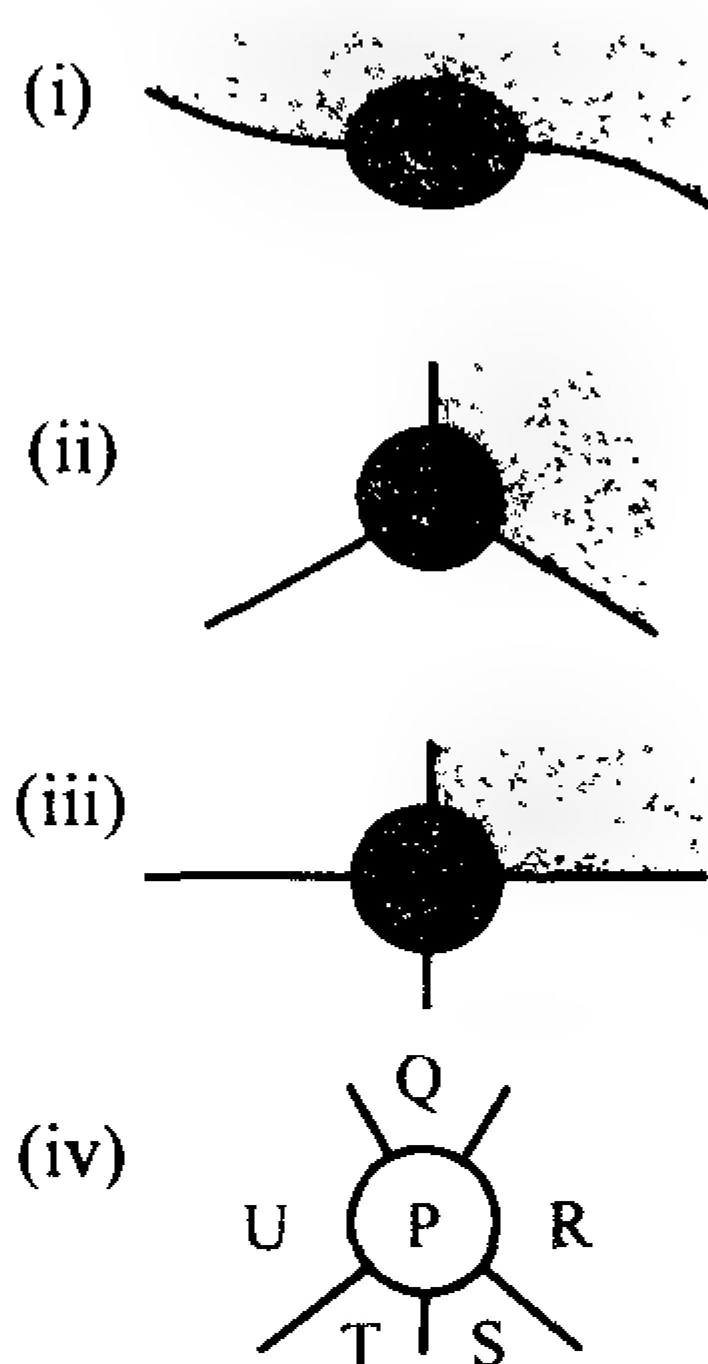


图 13.3

为了证明四色定理,肯泊使用了反证法,假定存在有需要用 5 种颜色着色的正规地图,当然可能会有很多这样的地图,它们包含的国家不同,其中至少有一张包含的国家数最少,称之为“最小正规地图”.而根据不可避免性,这张最小正规图必定包含有一个至多只有 5 个邻国的国家.肯泊进一步论证说:如果一张需要用 5 种颜色着色的最小正规地图包含一个至多只有 5 个邻国的国家,那么它就是“可约的”,即可以将它约简成有较少国家的正规地图,对这较少国家的地图着色仍需要用 5 种颜色.这样就引出了矛盾 —— 可以用 5 种颜色着色的正规地图包含的国家数比最小正规地图还要少.

肯泊的论证对有 2 个、3 个和 4 个邻国的国家来说是完全正确的,但他对有 5 个邻国情形的处理,即对图 13.3(iv) 的可约性证明却犯了错误,这个错误经希伍德指出后,在很长时期内没有人能纠正.

从 1913 年开始,有一些数学家对平面图形的可约性进行了深入研究,他们仔细分析了肯泊受挫的最后一种情形,认识到必须寻找与肯泊不同的不可避免集.不过实际作出这样一组不可避免集却遇到了意想不到的计算困难.经过半个多世纪的徘徊,直到 1969 年,才有一位德国数学家希斯(H. Heesch) 第一次提出了一种具体可行的寻找不可避免可约图的算法,他称之为“放电算法”.希斯的工作打开了新的局面.

① 肯泊称那样一些图为“正规地图”,使得其中不存在完全被其他国家包围的国家,同时其中任何一点至少是 3 个国家的接触点.

1960年代末,美国伊利诺大学的哈肯注意到希斯的算法可以大大改进和简化,他与另一位数学家阿佩尔合作,从1972年开始用这种简化的希斯算法产生不可避免可约图集.他们采用了新的计算机实验方法,并得到了计算机程序专家的帮助.在积累了大量经验后,大约在1976年初,他们发起了对四色问题的最后冲击.到1976年6月,他们终于获得了成功:一组不可避免可约图终于找到了,这组图形一共有2000多个.他们总共在伊利诺大学的各种计算机上进行了1200小时的计算,计算程序先后修改了500余次,此外,两位数学家还亲自用手算分析了10 000多个正电荷顶点的相邻网络.

13.7　分形与混沌(1977)

20世纪数学在几何概念上有两次飞跃与空间维度相关:从有限维到无穷维的飞跃,发生在上半世纪(参见11.2);从整数维到分数维的飞跃,发生在下半世纪.法国数学家蒙德尔布罗(B. Mandelbrot)1967年在《科学》杂志发表的文章《英国海岸线有多长?》标志着后一次飞跃的开始.

海岸线问题是一个实际的地理测量问题.英国人L.理查森考察这一问题,发现在西班牙、葡萄牙、比利时、荷兰等国出版的百科全书中记录的一些海岸线长度竟相差20%,大大超过了允许误差.蒙德尔布罗从数学上研究这一问题,认为这种超常的误差与海岸线形状的不规则有关,由于这种不规则,不同的测量尺度将得出不同的测量结果.蒙德尔布罗采用瑞典数学家柯克(H. von Koch)1904年发现的一种曲线——"柯克曲线"作为思考海岸线问题的数学模型.以一个平面等边三角形的每条边的中央三分之一为底向外侧作一小等边三角形,然后抹去这小三角形的底边,就得到一条新的闭折线,在新曲线的每条边上重复刚才的作图,这样无限继续下去,所得到的极限图形就是柯克曲线(图13.4是一条边上的作图过程).设原三角形的边长为1,容易看出,柯克曲线的长度 $L_k = \lim_{n\to\infty} 3\times\left(\frac{4}{3}\right)^n$ 是一个无穷大数,而它所包围的面

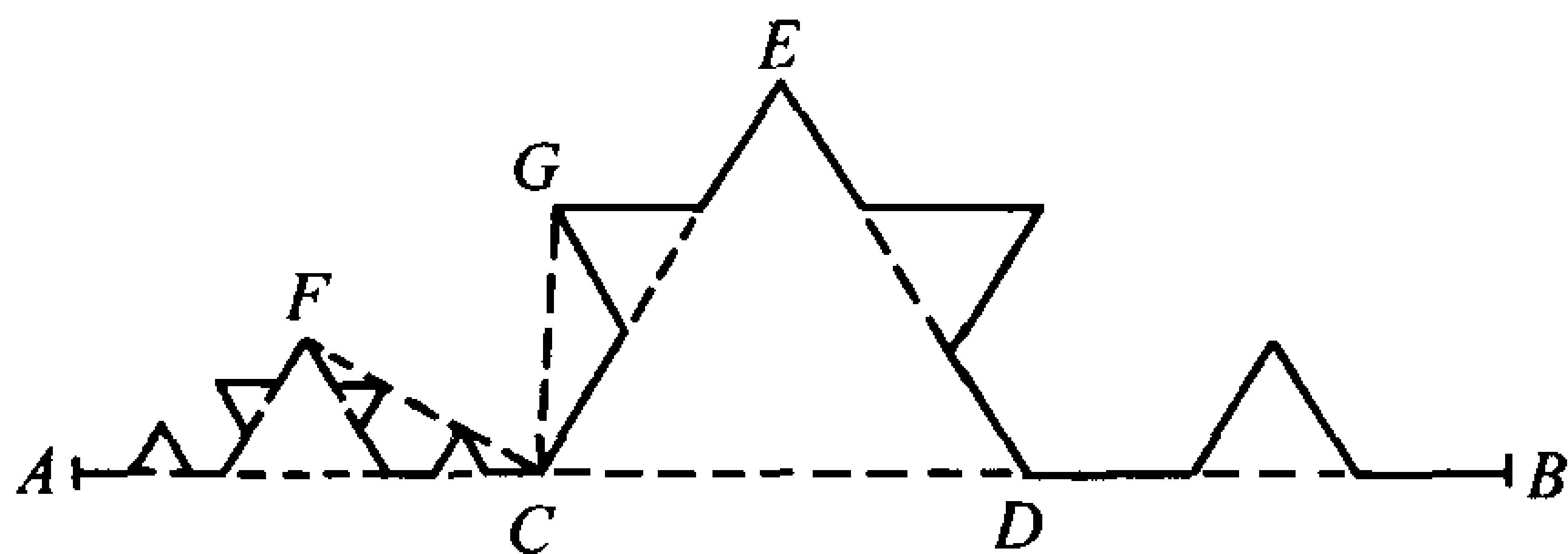


图 13.4

积则是一个有限数(等于原三角形面积的 1.6 倍).一块有限的面积具有无穷长的边界,蒙德尔布罗认为这种奇怪的现象是由边界曲线的"无限折曲"引起的.正是通过对这种"无限折曲"过程的深入研究,蒙德尔布罗引进了分数维数的概念.

通常的曲线都是一维的,在其上只能沿一个方向运动(约定将向后运动看作是负的向前运动).柯克曲线的每一条近似曲线也都是一维图形,但作为极限的柯克曲线却不能这样用"方向"来确定维度,其"方向"改变了无限次,必须寻找其他的与方向无关的途径来建立这类曲线的维度概念.蒙德尔布罗利用了一条关键的性质——"自相似",即整体与部分相似,并通过与通常整数维情形的类比,成功地确定了柯克曲线一类几何图形的维度,并发现它们是一些分数.

设有一 D 维图形,将它分成 N 个与整体相似的部分,整体与每个部分的相似比是 r,它与维数 D 的关系是:

$$r = \sqrt[D]{N} \qquad (*)$$

对一根直线,分成 N 段,每段恰好是整体的$\frac{1}{N}$,相似比 $r = \sqrt[1]{N} = N$,恰好是 $D = 1$ 时(*)式给出的数值.

对一个矩形,长、宽各 k 等分,分成 $N = k^2$ 块,整体与部分的相似比显然是 $r = \sqrt[2]{N} = \sqrt[2]{k^2} = k$.

对柯克曲线,D 未知,但 N 和 r 的值可以确定:$N = 4, r = 3$.这两个数字显然对每一步近似曲线的每一小段都成立,故对整个柯克曲线也应成立,根据(*)式得 $3 = \sqrt[D]{4}$,从而有:

$$D = \log 4/\log 3 \approx 1.2618.$$

也就是说柯克曲线是一个具有分数维的几何实体.

柯克曲线只是具有分数维的几何图形的一个例子. 蒙德尔布罗1977年正式将具有分数维的图形称为"分形"(fractal),并建立了以这类图形为对象的数学分支——分形几何. 他在这一年出版的著作《分形:形,机会与维度》中指出了大量的物理与生物现象都产生分形,引起了普遍的关注.

分形的基本性质是上面提到的自相似性. 至此蒙德尔布罗等考虑的分形自相似性都是像柯克曲线那样在平移和线性放大下的自相似(即在线性变换下保持不变). 现实世界的分形现象往往要复杂得多,如实际海岸线的性状就远不如柯克曲线那样规则. 从1978年开始,蒙德尔布罗等人开始研究在非线性变换(即允许比简单放大与平移更复杂的操作如平方、立方等)下保持不变的分形,他们利用电子计算机来产生这样的分形图形,并研究它们的性质,又发现了所谓"混沌"(chaos)现象,导致了混沌动力学的建立.

蒙德尔布罗是从较简单的函数 $f(x) = x^2 + c$ 开始的,这里 x 是复变量,c 是复参数. 从某个初始值 x_0 开始,根据规则

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

迭代函数 f,产生点列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$. 蒙德尔布罗发现,对于一定的参数值 c,迭代结果在某几个值(复平面上的点)之间循环(周期)振动,这些值被称之为"吸引子". 不同吸引子控制的复平面区域的边界,构成一些具有自相似性质的分形曲线(称为朱利亚集,以纪念早前研究过这些曲线的法国数学家朱利亚). 不同的参数值 c,将产生不同的吸引子分布,而对于某些特定的参数值 c,迭代结果出现无规则振动(或者说振动周期无限加倍)的现象,这就是所谓"混沌". 更为神奇的是,蒙德尔布罗在混沌行为的背后又发现了许多隐藏着的有序现象.

由上述可见,复动力系统的行为与参数 c 的选择密切相关. 蒙德尔布罗进一步研究了 c 在复平面上的分布,以判别相应动力系统及其朱利亚集具有的特定形态. 这使他在1980年发现了现在以他的名字命名的复平面区域(子集):蒙德尔布罗集. 图13.5(i)所示即著名的蒙德尔布罗集. 蒙德尔布罗集已显示出与所有动力学过程行为的重要联系,因

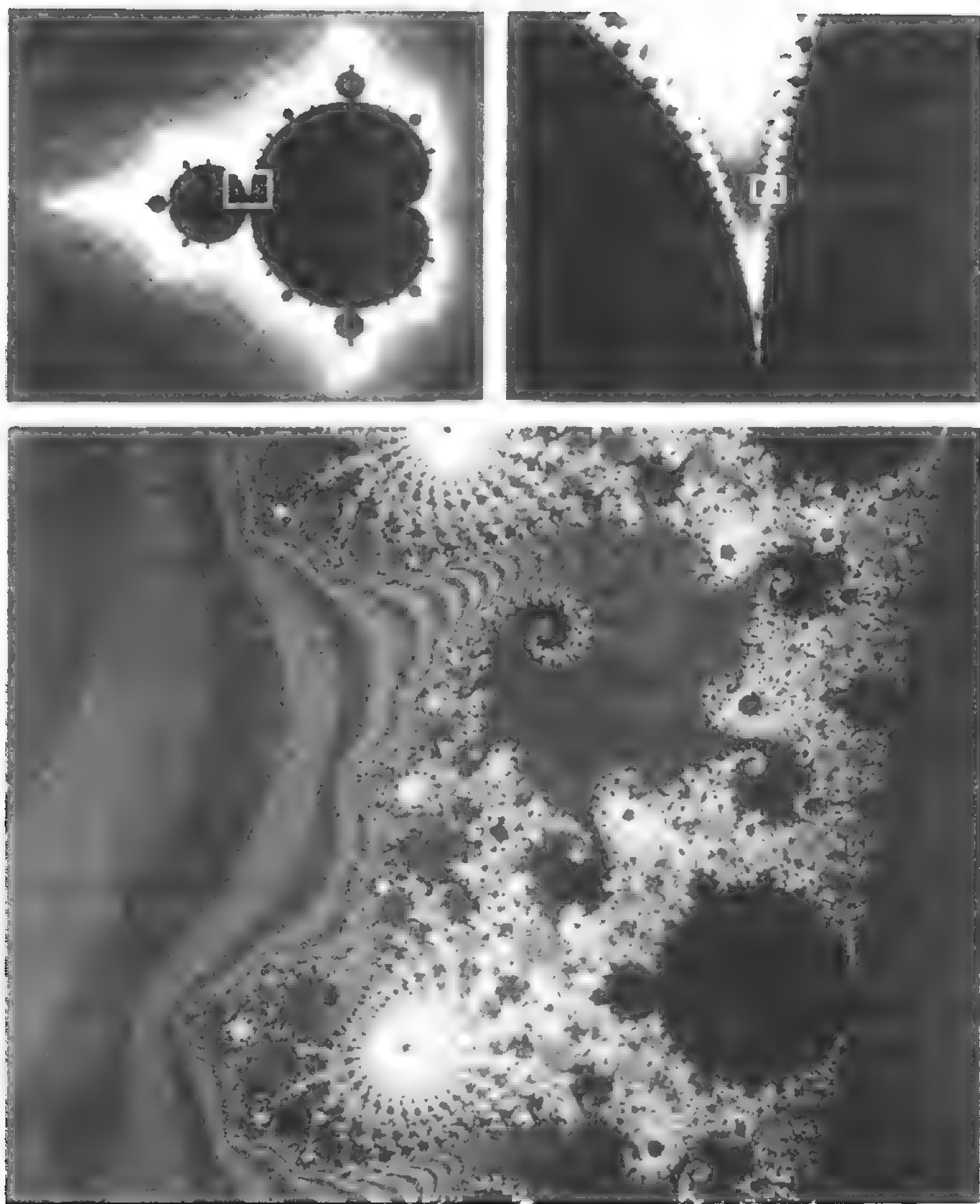


图13.5　(i) | (ii) / (iii)

此被认为是像圆和正多边形等图形一样,在数学中占有特殊的地位.

由于复迭代过程对于哪怕是较简单的动力系统都需要巨量的计算,因此分形几何与混沌动力学的研究只有借助于计算机才能进行.蒙德尔布罗利用高速计算机产生了大量精美奇妙的分形图案,

图 13.5(ii)、(iii) 是经过计算机“放大”的蒙德尔布罗集边界区域一瞥.

当然,分形几何与混沌动力学不只是扮演计算机艺术家的角色,事实表明它们是描述和探索自然界大量存在的不规则现象(海岸线性状、大气运动、海洋湍流、野生生物群体涨落,乃至股市升降等等)的崭新数学工具.

13.8 有限单群分类(1980)

群是现代数学核心领域之一抽象代数中最基本的概念,有限单群分类定理则是 20 世纪数学家们探索群的概念所得到的一个最基本的结果.

单群是群论的基本构件,它对于群论的意义,可以比作数论中的素数、物理学中的基本粒子(素数是数论的基本构件,基本粒子是物理学中的基本构件).

单群是一种群,它的压缩像仅有其自身和点像.每一个有限群都可以唯一分解为一些单群的集合,就像数论中每一个合数都可以被分解为它的素数因子的乘积一样.

一个很自然的问题就是:能不能找出所有的单群?或者说能否说出什么样的群是单群,什么样的群不是单群?这就是有限单群分类问题,它是在 20 世纪 40 年代初被提出的,经过近 40 年的努力,在 1980 年获最终解决.数学家们得到了有限单群分类的基本结果,即有限单群分类定理:

有限单群包括 18 个正则无限群族(成族出现的群)和 26 个散在群(单独出现的群),再没有其他的有限单群了.

有限单群分类定理的证明是数学史上一项典型的集体攻坚的成果,来自美国、英国、德国、澳大利亚、加拿大、日本和中国等不同国家的一百多位数学家先后为这一问题的解决作出了贡献.

美裔德国数学家布饶尔(R. Brauer)是现代有限单群分类工作的先驱,他从 1940 年左右开始用模特征标理论研究有限单群问题;1942 年与中国数学家段学复合作完成了 10 000 阶以下的单群分类;1954 年又

证明了关于对合的中心化子定理,这条定理不仅促使人们发现了很多新的散在单群,而且提供了将任意给定单群纳入所提出的分类范畴的初步方法,因此成为单群分类工作的新起点.

布饶尔之后一个重要的突破是费特(W. Feit)和汤普逊(J. Thompson)取得的,他们在 1962 年证明了关键的伯恩赛德(W. Burnside)猜想——所有非交换单群都是偶数个元素的群.这一结果被称为费特 - 汤普逊定理,其证明占了《太平洋数学杂志》255 页篇幅,预示着完全分类定理的最后证明将是很长的.

1972 年,戈伦斯坦(D. Gorenstein)在芝加哥大学的一系列讲演中提出了一个解决分类问题的 16 步纲领,发起了向单群分类定理的最后进攻.按照戈伦斯坦的纲领,加州理工学院一位刚刚研究生毕业的年轻数学家阿施巴赫尔(M. Aschbacher)从一条被称为分支定理的重要事实出发,一个接一个地证明了导致单群分类定理最后解决的成果.

1980 年,格里斯(R. Griess)找到了 26 个散在单群的最后一个也是最大的一个散在群,数学家们称之为"大魔",它有 8×10^{53} 个元素.同年夏天,随着最后一个技巧性问题的解决,整个有限单群分类定理的证明宣告结束.

有限单群分类定理可以说是数学史上最庞大的一条定理,整个结果由 500 多篇论文组成,在各种数学杂志上占了约 15 000 页版面.这样冗长的证明使许多数学家感到困惑,并怀疑其中会有错误.在这方面,在该定理的最后证明中起了重要作用的阿施巴赫尔评论道:

"一方面,当证明长度增加时,错误的概率也增加了.在分类定理证明中出现错误的概率实际上是 1.但另一方面,任何单个错误不能被容易地改正的概率是 0.由于该证明是有限的,所以定理是错误的概率接近于 0.随着时间的推移,我们将有机会推敲证明,对它的信任度必定会增加.

"…… 有一些自然的基本的定理,它们可以简明地叙述出来,但没有简短的证明.我猜想分类定理就是这样的成果.当我们的数学变得更成熟时,我们可能会经常地碰到这类定理".

13.9　费马大定理的证明(1994)

费马大定理于 1994 年获证,可以说是 20 世纪数学一首美妙的终曲,这使得以希尔伯特问题开场的 20 世纪数学发展更加富有戏剧性.

这条表述极其简明的定理,自从三百多年前被费马提出以来,曾吸引了像欧拉、高斯、柯西、勒贝格等这样一些大师试过身手却始终悬而未决.

数学家们是从分析几种特殊情形入手的.费马本人大概就是这样去做,虽然我们已无从知晓他是否真的给出过他在丢番图《算术》一书的页边批注中宣称过的证明,但数学史上一般确认他用无限下降法证明了 $n=4$ 的情形(7.3).



图 13.6　费马

费马之后,整个 18 世纪,关于费马大定理只有一个本质的结果,就是 $n=3$ 的情形,并且是由欧拉给出的.欧拉的证明用到了数系 $\{a+b\sqrt{-3}\}$(a,b 为任意整数) 中的唯一因子分解定理,而在这一情形唯一因子分解定理成立仅仅是一种巧合(7.3).

容易明白,若对一给定指数 m 证明了费马大定理,那么也就证明了对指数为 m 的倍数费马大定理也成立.因此为了最终证明费马大定理,只需考虑 n 为大于 2 的奇素数和 $n=4$ 的情形即可. $n=4$ 的情形已为费马解决,问题便归结为对 n 为奇素数情形证明费马大定理成立.由于欧拉证明了 $n=3$ 情形,下一个目标自然就是 $n=5$ 的情形.这一步到 1825 年才由狄利克雷和勒让德迈出,他们的证法基本上是欧拉对 $n=3$ 情形所用方法的延伸,但却明智地避开了唯一因子分解定理.

1839 年,法国数学家拉梅(G. Lamé) 证明了 $n=7$ 的情形,他的证明使用了跟 7 本身结合得很紧密的巧妙工具,因此难以推广到 $n=11$

的情形.拉梅在1847年又提出了新的途径,即利用所谓“分圆整数”①来证明一般的费马大定理,并向巴黎科学院宣读了自己的证明.拉梅做完报告后,当时在场的刘维尔指出拉梅的证明需要用到唯一因子分解定理,而据他所知,对分圆整数系该定理一般是不成立的.极度窘迫的拉梅经过几个星期的拼搏试图挽救他的证明,但最后认识到自己犯的是无可补救的错误.其实,早在三年前,库默尔已证明了对分圆整数系唯一因子分解定理一般不成立,只是库默尔的论文发表在一本不起眼的文集上,没有引起拉梅的注意.

库默尔是高斯的学生,高斯曾尝试过费马大定理的证明,但在证明 $n = 7$ 的情形遭失败后放弃了这个课题,并说:“我承认,费马定理作为一个孤立的命题对我没有多少兴趣,因为可以容易地提出许多这样的命题,人们既不能证明它们,也不能否定它们.”这是智者千虑必有一失,而他的学生库默尔却从1844年起发表了一系列论文,来解决证明费马大定理中涉及的一个关键问题——唯一因子分解定理,并为此创造了“理想数”概念(8.4).利用理想数,库默尔证明了:对于所有小于100的素指数 n,费马大定理成立.这是历史上第一次对一整批指数 n 证明了费马大定理.

库默尔在费马大定理证明方面的领先地位保持了一百多年,在他之后,这一问题的研究长期停滞不前.其间不乏大胆探索的数学家,例如现代积分理论的奠基人勒贝格就曾向法国科学院提交过一个费马大定理的证明,勒贝格的名声使法国科学院大为振奋,以为这个难题终将由本国人解决了.但经过仔细审查,仍然发现了漏洞.难怪有些著名的数学家对这个难题敬而远之.例如希尔伯特被公认为是攻克数学难题的高手,他在巴黎讲演《数学问题》的前言中首先提到了费马大定理,但当有人问他为什么自己不试试解决这个难题时,他风趣的回答是:“干吗要杀死一只会下金蛋的鹅?”

直到1983年,费马大定理的研究才出现新的转机.这一年,德国数

① 复方程 $z^n - 1 = 0$ 的 n 个根为 $1, r, r^2, \cdots, r^{n-1}$.分圆整数是指形如 $a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_{n-1} r^{n-1}$ 的数,其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 都是整数.所有的分圆整数也构成一个数系.

学家法尔廷斯(G. Faltings)证明了一条重要的猜想——莫代尔猜想(L. Mordell, 1922). 莫代尔猜想是说:像

$$x^n + y^n = 1$$

这样的方程至多有有限个有理数解. 但由于方程 $x^n + y^n = z^n$ 的任一整数解可导出 $x^n + y^n = 1$ 的有理数解,因此可以得出结论: $x^n + y^n = z^n$ 至多只有有限多个(无公因子)整数解,也就是说 $x^n + y^n = z^n$ 如果有整数解的话,至多只能是有限个. 法尔廷斯的结果虽未证明费马大定理,但却把存在无穷多个解的可能性降低到了至多只能有有限多个解. 法尔廷斯因此获得了 1986 年的菲尔兹奖.

法尔廷斯的工作之后又经过十年,终于有数学家登上了费马大定理这座高峰. 最后的登山路线却与从费马到法尔廷斯等前人不同,是综合利用了现代数学许多分支的成就,特别是 1950 年代以来代数几何领域中关于椭圆曲线的深刻结果.

形如 $y^2 = f(x)$($f(x)$ 为 x 的三次或四次多项式)的方程所描绘的曲线叫椭圆曲线. 1955 年,日本数学家谷山丰(Y. Taniyama)首先猜测椭圆曲线与另一类数学家们了解较多的曲线——模曲线之间存在着某种联系. 谷山的猜测后经韦依和志村五郎(G. Shimura)进一步精确化而形成了所谓"谷山 - 志村猜想".

谷山 - 志村猜想:有理数域上的椭圆曲线都是模曲线.

当时还没有人想到这条非常抽象的猜想与费马大定理会有什么联系. 但 1985 年,一位叫弗雷(G. Frey)的德国数学家却指出了二者之间的重要联系. 事实上,弗雷提出了如下的命题:

弗雷命题:假定费马大定理不成立,即存在一组非零整数 A, B, C,使得 $A^n + B^n = C^n (n > 2)$,那么用这组数构造出的形如 $y^2 = x(x + A^n)(x - B^n)$ 的椭圆曲线(后称"弗雷曲线"),不可能是模曲线.

显然,弗雷命题与谷山 - 志村猜想是矛盾的,如果能同时证明这两个命题,根据反证法就可以知道"费马大定理不成立"这一假定是错误的,从而就证明了费马大定理. 弗雷当时没有能严格证明他的命题. 弗雷命题 1986 年被美国数学家里贝特(K. Ribet)证明,这样证明费马大定理的希望便集中于谷山 - 志村猜想. 这最后集大成的一步 1994 年

由英国数学家维尔斯(A. Wiles) 完成.

维尔斯从小就梦想证明费马大定理,但当他成长为一名职业数学家后,曾产生过与高斯一样的想法,认为费马大定理也许只是个孤立的难题. 里贝特的结果又使他改变了主意,从 1986 年开始竭尽全力但却默默无闻地投入了证明费马大定理的努力. 椭圆曲线恰好是维尔斯的专长,这给了他机遇. 经过七年的努力,1993 年 6 月,维尔斯在英国剑桥大学举行的一次学术讨论会上报告了自己得到的主要结果,他证明了:



图 13.7　维尔斯

对有理数域上的一大类椭圆曲线,谷山－志村猜想成立.

由于维尔斯在报告中表明了弗雷曲线恰好属于他所说的这一大类椭圆曲线,因此听众们明白,维尔斯实际上是在宣布他证明了费马大定理.

维尔斯的报告立即引起了轰动,但他的报告长达二百多页,按照惯例,在得到最后确认前,必须经过同行专家的审查. 一个由六名专家组成的小组负责这项审查,他们以数学家特有的严格性一丝不苟地进行工作,果然发现了漏洞,维尔斯本人也承认自己的证明有漏洞需要补救. 又经过一年多的苦搏,到 1994 年 9 月,漏洞终于能被补上并通过了权威的审查,这个有三百多年历史的数学难题终于获得了解决. 维尔斯关于费马大定理的证明,分两篇论文(分别题为《模椭圆曲线与费马大定理》和《某些赫克代数的环论性质》,后一篇论文系与泰勒(R. Tayler) 合作) 刊登在 1995 年 5 月美国《数学年刊》(Annals of Mathematics) 上.

维尔斯 1994 年刚过 40 岁,这使他错过了获得菲尔兹奖的机会. 不过,1996 年,他成为迄今最年青的沃尔夫奖得主. 在 1998 年柏林国际数学家大会上,维尔斯又被授予了特别荣誉奖.

13.10 若干著名未决猜想的进展

随着四色问题和费马大定理等被相继攻克,数学中留下的其他重要未决猜想就更加受人关注,其中最著名的有庞加莱猜想、哥德巴赫猜想和黎曼猜想.这些猜想虽然迄今尚未获证,但其研究在 20 世纪都取得了重大进展,最终证明这些猜想,成为向 21 世纪数学家们的挑战.

(1) 庞加莱猜想

庞加莱猜想是拓扑学中一个著名的和基本的问题.数学家们已经知道这样的事实:任意一个二维单连通闭曲面都与二维球面同胚(即拓扑等价)."单连通"是一种拓扑性质:在曲面上任意画一个闭圈,如果能在不离开曲面的情况下将这个闭圈缩成一点,这叫该曲面是单连通曲面.二维球面是单连通曲面,环面则不是(图 13.8).这样上面的事实就是说:从拓扑等价的观点看,对闭曲面而言,单连通性完全是球面的特性.1904 年,庞加莱猜测在三维情形应有同样事实成立,即任意一个三维的单连通闭流形必与三维球面同胚.这就是庞加莱猜想.以后人们又将庞加莱的猜想推广到 n 维情形.n 维情形的庞加莱猜想也叫"广义庞加莱猜想".

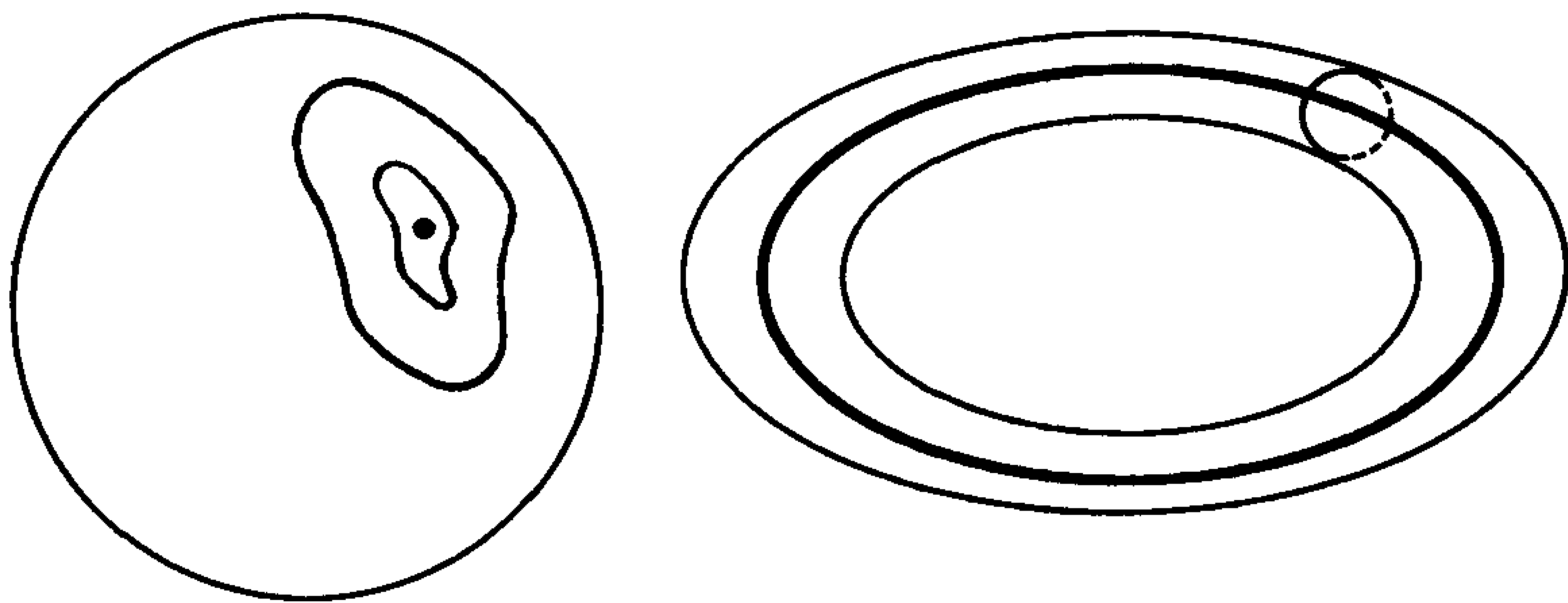


图 13.8

庞加莱本人曾力图证明自己的猜想,但始终未能如愿.在 1960 年以前,所有证明(或否证)庞加莱猜想的尝试都归于失败.直到 1960 年,

美国数学家斯梅尔(S. Smale) 才取得了第一个突破,他证明了庞加莱猜想对五维和五维以上的情形都是成立的. 不过,斯梅尔的方法在用于解决三维和四维情形时却显得无能为力. 整整 20 年以后,另一位美国数学家弗里德曼宣告证明了四维庞加莱猜想. 弗里德曼的证明,是他关于四维流形的更一般的结论(参见本章"米尔诺怪球") 的特殊情形. 这样,所有大于三维的庞加莱猜想都被证明是成立的,只剩下三维情形没有解决,而庞加莱当初恰恰是针对三维球面提出他的猜想的. 从弗里德曼以后,尽管有许多数学家的认真投入,庞加莱猜想作为未决拓扑学难题的地位依然如故.

(2) 哥德巴赫猜想

哥德巴赫猜想自 1742 年被提出以来(参见 7.3),已历时两个半世纪之多,但对这一猜想的研究,直到 20 世纪初才有本质性的进展.

1920 年, 哈代(G. H. Hardy, 1877—1947) 和李特尔伍德(J. E. Littlewood, 1885—1977) 首先将他们创造的圆法应用于数论难题,哥德巴赫猜想研究长期停滞的局面也出现了松动. 他们在 1923 年在广义黎曼猜想正确的前提下证明了每个充分大的奇数都是三个奇素数之和以及几乎所有偶数都是两个奇素数之和. 1937 年,维诺格拉多夫(И. М. Виноградов, 1891—1983) 利用圆法和他自己的指数和估计法无条件地证明了奇数哥德巴赫猜想,即每个充分大的奇数都是三个奇素数之和. 这是哥德巴赫猜想证明的第一个实质性突破. 不过圆法用于偶数哥德巴赫猜想效果却并不令人鼓舞.

偶数哥德巴赫猜想(即每个充分大的偶数都是两个奇素数之和) 的进展主要是依靠改进筛法取得的,这方面的起点是 1919 年挪威数学家布朗(V. Brun) 的结果,布朗利用他的新筛法证明了:每个大偶数都是两个素因子个数均不超过 9 的整数之和(记为{9,9},记号{k,l} 表示大偶数分解为不超过 k 个奇素数的积与不超过 l 个奇素数的积之和,下同). 以后大约半个世纪时间内,数学家们利用各种改进的筛法对于较小的 k, l 证明{k,l},步步为营地向最终目标{1,1}逼近. 到 1954 年,已经引出的最好结果是布赫夕塔布(А. А. Бухштаб) 的{4,4}(1940)、瑞尼(A. Renyi) 的{1,c}(c 为一不确定大数)(1948) 和库恩(P. Kuhn)

的$\{a,b\}(a+b\leqslant 6)$(1954);1953年,中国数学家华罗庚组织领导了哥德巴赫猜想讨论班,这个讨论班产生了丰硕的成果,特别是王元的$\{2,3\}$(1957)和潘承洞的$\{1,5\}$(1962),使中国数学家在哥德巴赫猜想研究领域占据了领先地位;到1965年,欧洲数学家又暂时领先,邦别里(E.Bombieri)等三人差不多同时证明了$\{1,3\}$;但一年以后,中国数学家陈景润即宣布证明了$\{1,2\}$(1973年发表详细证明).陈景润的结果被认为"是筛法理论的光辉顶点",它使数学家们离开哥德巴赫猜想的最终证明$\{1,1\}$似乎只有一步之遥,但这一步,经过30多年后至今仍无人跨越.

(3) 黎曼猜想

黎曼猜想联系着数论与函数论领域一系列重要难题与猜想的解决,因而在现有的未决数学猜想中占据着特殊的地位.

黎曼猜想断言:在带状区域$0\leqslant\sigma\leqslant 1$中,黎曼$\zeta$函数$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$的零点都位于直线$\sigma=\frac{1}{2}$上.这一猜想自1859年由黎曼提出后,引导了解析数论中许多重要的发现,但关于它自身的证明,却长期进展甚微.第一个突破是哈代作出的,他在1914年证明了$\zeta(s)$有无限多个零点的实部等于$\frac{1}{2}$;1942年,赛尔伯格迈出了重大的一步,他证明了

$$N_0(T)\geqslant cN(T)$$

其中$N_0(T)$表示$\zeta(s)$在线段$\frac{1}{2}+\mathrm{i}t(0<t\leqslant T)$上的零点个数,$N(T)$表示$\zeta(s)$在矩形$\{0\leqslant t\leqslant T,0\leqslant\sigma<1\}$中的零点个数.因明显地有$N_0(T)\leqslant N(T)$,如能证明$N_0(T)\geqslant cN(T)$且$c=1$,则黎曼猜想成立.赛尔伯格证明中得到的常数$c$等于$\frac{1}{100}$左右,虽然与$c=1$相去甚远,但开辟了证明黎曼猜想的新方向.沿此方向,1974年莱文生(N.Levinson)将c的值提高到了$\frac{1}{3}$,即证明了:$\zeta(s)$至少有三分之一的非平凡零点的实部为$\frac{1}{2}$.

黎曼猜想研究的另一条途径是寻找数值反例,即通过大量计算来

发现 $\zeta(s)$ 的不在直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上的零点. 但是,迄今为止进行的一切计算似乎都在支持黎曼猜想的成立. 例如 1985 年范德隆(J. van de Lune) 和黎勒(H. J. te Riele) 合作计算了前 15 亿个零点,尚未发现黎曼猜想的任何反例. 不用说,这些计算都借助了电子计算机的威力,因此黎曼猜想即使不成立,那么反例数必定是超出了人们通常想象的范围. 但无论多么巨大的计算都只能提供有限的例证,数值归纳不能代替严格证明(除非真的算出哪怕一个反例). 黎曼猜想离最终解决尚远.

哥德巴赫猜想、黎曼猜想等的研究极大地推动了 20 世纪解析数论的发展,围绕这些问题的解决而产生的强有力的方法,不仅是数论,而且也是数学其他许多分支的宝贵财富.

希尔伯特 1900 年将黎曼猜想与哥德巴赫猜想、孪生素数猜想一起列为巴黎演讲中的第八问题时,曾预言它们的解决当在第七问题(某些数的超越性) 之前,但事实相反,第七问题在 1930 年代即获解决(参见 11.1),而第八问题包括的所有三个猜想却都依然作为未决猜想而被带入了 21 世纪.

数学与社会

14

数学的发展与社会的进化有着密切的联系,这种联系是双向的,即一方面,数学的发展依赖于社会环境,受着社会经济、政治和文化等诸多因素的影响;另一方面,数学的发展又反过来对人类社会的进步起推动作用,包括对人类物质文明和精神文明两大方面的影响.对于数学与社会的这种联系,作为以数学思想发展史为主的教程,不可能作详细的讨论,但由于了解这种联系对全面了解数学科学的意义、作用以及数学发展的规律有所帮助,本章就数学史的这一社会学方面作很简要的介绍.

14.1 数学与社会进步

数学从它萌芽之日起,就表现出解决因人类实际需要而提出的各种问题的功效.商业、航海、历法计算、桥梁、寺庙、宫殿的建造、武器与工事的设计等等,数学往往能对所有这些问题作出令人满意的解决.数学在现代社会生活中的直接应用更是大量的和经常的.本书前面各章对数学的应用已有不少介绍.不过这里要强调说明的是:数学对人类物质文明的影响,最突出的是反映在它与能从根本上改变人类物质生活方式的产业革命的关系上.人类历史上先后共有三次重大的产业革命,这三次产业革命的主体技术都与数学的新理论、新方法的应用有直接或间接的关联.

微积分作为一种强有力的新工具,推动了以机械运动为主题的17、18世纪整个科学技术的高涨,成为18世纪60、70年代开始的第一次产业革命的重要先导,第一次产业革命的主体技术是蒸汽机、纺织机等,它们的设计涉及对运动与变化的计算,而这只有在微积分发明后才有可能;第二次产业革命始于19世纪60年代,前后分为两个阶段,第一阶段以发电机、电动机为主体技术,后一阶段以电气通信为主体技术.这些技术革命当然是依靠了电磁理论的发展,而电磁理论的研究是与数学分析的应用分不开的,如法国数学物理学家泊松、安培(A.-M. Ampére,1775—1836)等人运用微积分奠定了电磁作用的数学基础.高斯不仅对电磁理论卓有贡献,而且他本人就是电报装置的发明者;至于现代无线电通信技术,则如前所说溯源于麦克斯韦从数学上预报了电磁波的存在,正如麦克斯韦本人曾指出的那样:倘若没有格林、高斯等数学家提出的位势理论,没有偏微分方程这个数学工具,他是不可能建立电磁学说的.

从20世纪40年代开始的第三次产业革命,主要是电子计算机的发明使用、原子能的利用以及空间技术、生产自动化等.我们在第10章中已经指出,在计算机发展史上每一个重要的关头,都记载着数学家们不可磨灭的贡献;原子能的释放,首先是由于爱因斯坦利用数学工具导出的著名公式 $E = mc^2$ 揭示出质能转化的可能性.美国在第一颗原子弹研制过程中吸收了一批数学家参与,冯·诺依曼就是洛斯阿拉莫斯实验室(第一颗原子弹研制基地)的主要科学顾问之一,另一位美籍波兰数学家乌拉姆(S. Ulam,1909—1984)也在洛斯阿拉莫斯工作了很长时期,在美国第一颗氢弹研制中起了很关键的作用.20世纪50年代前苏联为了发展其核计划与空间计划,也充分动员了数学家,属于莫斯科数学学派的凯尔迪什(M. B. Келдыш,1911—1978)是前苏联空间计划的理论权威,1953年创办前苏联科学院数学研究所应用数学部,前苏联第一颗人造卫星计划的轨道计算就是在那里进行.应用数学部后发展为独立的应用数学所,凯尔迪什任所长,莫斯科大学一些数学家被聘到该所兼职,如著名泛函分析专家盖尔范德(И. M. Гельфанд)、数学物理方程专家吉洪诺夫(A. H. Тихонов)等都参与过前苏联空间计划与

核计划的有关课题；至于自动化技术，其发展受到了控制论的深刻影响，我们在第12章中已介绍过，控制论本身是第二次世界大战前后产生的应用数学，数学家维纳、庞特里亚金等是其主要创始人.

数学与生产（包括产业革命）的联系具有多种方式，有时是间接的，在更多的情况下，纯数学的成果首先是被应用于其他自然科学领域而对科学革命发生影响.但不论采取什么方式，数学在推动人类物质文明进步方面的威力是越来越受到公众的承认了.

数学对于人类精神文明的影响同样也很深刻.数学本身就是一种精神，一种探索精神，这种精神的两个要素，即对理性（真理）与完美的追求，千百年来对人们的思维方式、教育方式以及世界观、艺术观等的影响是不容否定的，对这些影响的各个方面作深入分析，已超出了本教程的范围，这里我们仅仅强调，数学对人类精神文明的意义，也突出地反映在它与历次重大思想革命的关系上.由于其不可抗拒的逻辑说服力和无可争辩的计算精确性，数学往往成为解放思想的决定性武器.以文艺复兴时期科学与宗教的斗争为例，哥白尼"日心说"是向宗教和中世纪传统思想的宣战，但日心说长期受到教会势力的抵制，为此布鲁诺（G. Bruno）被教会活活烧死在罗马鲜花广场，伽利略被宗教裁判所判罪而终身软禁.日心说的决定性胜利是在牛顿用最新数学工具——微积分和严密的数学推理从动力学定律、万有引力定律出发推演出太阳系的运动之后，也就是说是在研究天体运动的"最重要的数学方法基本上被确定了"[①]之后.19世纪初，英国的亚当斯和法国的勒维烈，根据太阳系学说提供的数据，从数学上推算出一颗未知行星的存在并预报了它在太空中的位置，德国天文学家加勒于1846年9月23日晚在亚当斯、勒维烈所指出的位置只差一度之处找到了这颗新的行星——海王星，哥白尼的学说得到了光辉的证实.十分有意思的是，哥白尼这位文艺复兴思想革命的旗手，在他的《天体运行论》中一再批评了他那个时代"一般数学家在这方面（即计算天体运行）的研究中矛盾百出"和"数学传统在确定天球系统的运动中所表现的不确定性"，他表示"决不怀疑，博学多

① 《马克思恩格斯全集》，第20卷，第363页.

才的数学家们如果遵照科学的要求,深入地而不是表面地理解和考虑为了证明我的见解所提出的论述,他们一定会同意我的看法"!

牛顿的数学方法像哥白尼所希望的那样确立了哥白尼日心说的真理地位.不过,牛顿力学又树立起绝对时空观念的权威.从绝对时空观向现代时空观即相对论时空观的飞跃,成为人类历史上又一次更深刻的思想革命,而正如我们在第 9 章和第 12 章中所看到的,非欧几何在其中所起的决定性作用也已众所公认了.

14.2　数学发展中心的迁移

纵观数学的发展,也许不难发现这样一个事实,即历史上数学发达中心的迁移,同社会政治、经济重心的迁移基本上是相吻合的.希腊几何是产生于古代奴隶制社会鼎盛的中心 —— 古希腊城邦制国家;希腊衰微之后,数学的领先地域转移到东方的印度、阿拉伯,尤其是中国 —— 那里在漫长的中世纪维持着封建经济的繁荣;从 15 世纪开始,数学活动的中心由于资本主义的兴起又返移欧洲,并随着资产阶级革命重心的转移而在欧洲内部不同的国家之间转移着:16 世纪至 17 世纪文艺复兴的意大利,是当时当之无愧的数学中心,这种地位在 17 世纪转移到英国.英国的资产阶级革命带来了它的海上霸权,同时也造就了牛顿学派,还有皇家学会的诞生;通过 18 世纪的法国大革命,法国数学取代英国而雄踞欧洲之首,巴黎在相当长一段时间内成为名符其实的"数学活动的蜂巢";法国维持其数学优势直到 19 世纪后期,70 年代以后,德国的统一运动又使德国数学起而夺魁,并且最终使哥廷根成为全世界数学家向往的"麦加";德国数学家的黄金年代,由于希特勒法西斯的浩劫而一蹶不振,第二次世界大战后,美国便成为西方数学家的一片乐土了.

以上关于数学发达中心的迁移的说明是粗线条的,但却可以给人们一个数学发展与社会环境相依存的鲜明印象.当然,数学发展与社会环境的相互作用是一个复杂的过程,除了经济基础、政治变革,还有哲学思想、一般文化积累等综合的影响.所以在个别不很发达的国家、地区,数学跻身于世界先进行列并非不可能(如第一次世界大战以后波兰

数学学派崛起).①另外,个别动荡时代也可能产生一些高水平的数学(如中国魏晋南北朝时期出现了刘徽、祖冲之的工作,比较而言大唐盛世却没有特别重大的数学成就),但总的来看,就一般规律而言,发达的经济和稳定的社会,总是数学发展所必要的有利条件.

下面来解剖一个历史例子,就是哥廷根数学的兴衰.哥廷根是德国中部一座历史悠久的大学城,哥廷根大学1737年建立.1795年,十八岁的高斯到哥廷根大学深造,从那以后,他终其一生在这里生活、工作,以卓越的成就改变了德国数学在18世纪初莱布尼茨逝世以来的冷清局面,同时也开创了哥廷根数学的传统.高斯成为哥廷根上空明亮的星座,但他本人不喜欢教书,保守的个性也使他置身于一般的数学交往活动之外.高斯去世以后,狄利克雷和黎曼继承并推进了他的事业,哥廷根的影响扩大了,但却仍然远离欧洲的学术中心.这种状况跟当时德国数学的整体水平有关.形势的根本改观发生在19世纪70、80年代,当时德意志民族的统一,将德国科学带入了普遍高涨的阶段.德国政府为了赶超英、法老牌资本主义国家,在国内大力实行鼓励科学发展的政策.正是在这样的时刻,1886年,克莱因来到了哥廷根,克莱因巨大的科学威望,加上他非凡的组织能力,对哥廷根数学的繁荣有特殊的意义.他到哥廷根以后做的第一件事是罗致人才,最先被他选中的就是希尔伯特.1895年,正好是高斯到达哥廷根后的第一百年,希尔伯特被克莱因请到了高斯的大学.在他们俩人的携手努力下,本世纪初的30多年间,哥廷根成为名符其实的国际数学中心,大批青年学者涌向哥廷根,不仅从德国、欧洲,而且来自亚洲,特别是美国.据统计,1862—1934年间获外国学位的美国数学家114人,其中34人是在哥廷根获博士学位的.克莱因从1914年就提出的筹建专门的数学研究所的计划,在1929年得以实现,当时克莱因已经去世,但新落成的哥廷根数学研究所,成为各国数学家神往的圣地.

① 1915年以后,华沙大学谢尔品斯基(W. Sierpinski,1882—1969)等组织的拓扑学与集合论讨论班,吸引了许多优秀年青人,形成华沙学派,1920年创办《数学基础》(Foundamenta Mathematicae)杂志,后成为有影响的国际性数学杂志.波兰学派中脱颖而出的数学家代表性人物有巴拿赫(S. Banach,1892—1945)、塔斯基(A. Tarski,1901—1983)等.



图 14.1　哥廷根数学研究所

然而哥廷根这个盛极一时的数学中心,却在法西斯的浩劫下毁于一旦. 1933 年希特勒上台,掀起疯狂的种族主义与排犹风潮,使德国科学界陷于混乱,哥廷根遭受的打击犹为惨重. 哥廷根数学学派中包括了不同国藉、不同民族的数学家,其中不少是犹太人,在法西斯政府驱逐犹太人的通令下,他们纷纷逃离德国:爱米·诺特、理查·库朗、赫曼·外尔,…….希尔伯特的学生有的还惨遭盖世太保的杀害,如在放宽条件下证明算术相容性的甘岑(G. Gentzen),在布拉格被追捕监禁而死在狱中;布鲁门塔尔(L. O. Blumenthal),他的名字曾出现在著名的《数学年刊》封面上,在荷兰被捕,1944 年死于捷克赛尔辛斯塔特集中营. 1943 年,希尔伯特在极其孤寂和抑郁悲愤的情况下离世. 哥廷根数学中心从此一蹶不振,而美国却获得了无可估量的财宝 —— 几乎所有希尔伯特学派的成员都永久移居到了美国,下面是这批科学移民一张不完全的名单:阿廷(E. Artin)、库朗(R. Courant)、德恩(M. Dehn)、弗里

特里希(K.O.Friedrichs)、勒威(H.Lewy)、诺依格包尔(O.Neugebauer)、冯·诺依曼(J.von Neumann)、诺特(E.Noether)、波利亚(G.Polya)、外尔(H.Weyl),…….

哥廷根数学的衰落,是现代科学史上因政治迫害而导致科学文化倒退的一幕典型的悲剧,但哥廷根的光辉数学传统,为现代数学的发展提供了宝贵的精神财富,人们是不会忘却它的.就在二战期间,赫曼·外尔在普林斯顿高等研究院已开始了按哥廷根传统建造又一个"伟大而充满热情的科学中心"的努力;理查·库朗则在纽约大学创建了数学与力学研究所(后更名为"库朗应用数学研究所"),那里也同样闪耀着哥廷根数学的精神.

14.3 数学的社会化

数学的社会化,是其现代化的标志之一.在19世纪以前,无论是数学研究还是数学教育,都局限于少数人的活动.数学的社会化过程大致完成于19世纪,而在20世纪得到了极大的加强,以下介绍数学社会化过程的若干重要方面.

14.3.1 数学教育的社会化

数学在古希腊教育中虽然占有主导的地位,但其宗旨是培养具有哲学头脑的奴隶主统治人才.古代东方国家特别是中国、日本、朝鲜等也都有数学教育制度,其对象主要也是贵族子第.中世纪欧洲微弱的数学教育是在教堂和修道院内进行的,从11世纪起陆续建立的早期大学如意大利波伦亚大学(1088)、法国巴黎大学(1180)和英国的牛津大学(12世纪中叶)、剑桥大学(1209)等也都隶属于教会或为教会服务.这种状况在文艺复兴后有所改变.16世纪意大利一些大学如波伦亚大学、比萨大学、帕多瓦大学等开始设立数学教授,费洛、卡尔丹、费拉里、伽利略和卡瓦列里等都任过数学教授.1619年英国牛津大学设萨维尔(Savili)几何教授,沃利斯任过此职;1663年,剑桥大学设卢卡斯

(Lucas)教授,巴罗和牛顿先后居此教席.瑞士的巴塞尔大学自1687年起由于伯努利家族成员的任教而成为欧洲数学教育的一个中心.在德国,1734年新成立的哥廷根大学不久也设数学教席,特别是高斯1807年成为那里的教授.然而总的说来,19世纪以前欧洲各国大学的数学教育基本上仍是少数人对少数人的教育,对数学发展起着有限的推动作用,有相当一部分的数学家脱离于大学之外.在18世纪,数学的交流、传播和研究活动则很大程度是与各国由宫廷维持的科学院相联系.将数学教育改革为面向更广泛的对象的社会化事业,并与数学研究相结合,这方面的巨大冲击首先是来自法国大革命.

1789年法国大革命爆发后,新的资产阶级政府撤消关闭了原有的巴黎大学和巴黎科学院,并着手建立作为替代的新型教育、科学机构,这些机构主要有:

巴黎综合工科学校(Ecole Polytechnique,1795);

巴黎高等师范学校(Ecole Normale Supérieure,1794年初建,原名Ecole Normale;1808年重建并定名);

法兰西学院(Institut der France,1795,巴黎科学院成为其三个分院之一).

其中巴黎综合工科学校和高等师范学校,虽然本来的宗旨是培养工程师和教师,但两校都把数学教育放到十分重要的地位.学校的组建工作最初就是由数学家孔多塞负责,当时法国最有名的数学家包括拉格朗日、拉普拉斯、勒让德、蒙日等都被请来担任数学教授,蒙日还被任命为综合工科学校的校长.这两所学校开辟的数学教育规模是空前的,光是蒙日的画法几何课,就有四百多名学生同时听课.它们的教学方法、考试制度都与旧大学完全不同.这一切,使这两所学校成为新一代法国数学家的摇篮,同时也成为19世纪乃至20世纪西方新型大学的样板,它们对数学科学的强调,影响逐渐扩及柏林、维也纳、斯德哥尔摩、苏黎世、布拉格和哥本哈根.例如1810年由于洪堡(F. von K. W. Humboldt)的努力而成立的柏林大学,为德国大学提供了新型数学教育的典范,那里在19世纪晚些时候成为以魏尔斯特拉斯为首的柏林数学学派的基地.

巴黎综合工科学校与高等师范学校提倡数学教学与研究相结合，并且产生了极其丰硕的成果.正是由于这两所大学师生的活动，巴黎在许多年间成为公认的数学中心，并使法国在19世纪上半个世纪占据了欧洲数学的领导地位.据统计，在19世纪前40年间发表的数学成果中，有百分之八十是法国数学家生产的，其中大多数又属于巴黎综合工科学校和高等师范学校.数学教学与研究的结合，已成为今日西方大学普遍的传统.

这两所新型大学对现代数学教育的影响还在于它们的教科书.为了适应新教育的需要，综合工科学校与高等师范学校采用了全新的教材，如：

蒙日：《画法几何学》(1794—1795)；

勒让德：《几何学概要》(Elements de géométrie，1794)；

拉克鲁阿(S.F.Lacroix)：《微积分教程》(Traité du Calcul différentiel et du Calcul integral，1797—1800)，共3卷.1802年出版合订本，易名《微积分基础教程》(Traité elementaire du Calcul differentiel et du Calcul integral)；

毕欧(J.-B.Biot)：《解析几何论》(Essais de géométrie analytigue，1802)

等等，这些教科书在综合工科学校和高等师范学校的教学中取得很大成功，它们不仅在法国国内被反复再版，(如毕欧的解析几何教程在12年内出了5版；拉克鲁阿的微积分教程到1881年出到第9版，他的另一部解析几何教程则出了25版，到19世纪末还在使用)，而且被译成多种语言，勒让德的《几何学概要》在整个19世纪是欧洲各国和美国的流行几何教科书.这些教科书酿成了一场“教科书革命”，它们是现代大学数学教科书的先驱.

14.3.2 数学专门期刊的创办

数学定期刊物的出版，是法国大革命为数学发展带来的又一福音.1810年，蒙日的学生热尔岗(J.-D.Gergonne，1771—1859)在巴黎以外

的蒙佩里尔(Monepellier)创办了数学专业性刊物《纯粹与应用数学年刊》(Annales de mathématiques pures et appliquées).热尔岗是19世纪射影几何的开拓者之一,他主编这份杂志直到它1831年休刊.

在19世纪以前,数学论文都发表在一般的综合科学刊物上,这类综合刊物在17世纪已经出现,最早的有:

《学人杂志》(Journal de Scavans,1665);

《教师学报》(Acta Erudieorum,1682).

另外还有早期科学院的院刊,主要有:

《皇家学会哲学汇刊》(Philosophical Transactions of the Royal Society,1665);

《巴黎科学院纪要》(Mémoires dè l'Académie des Sciences,1666). 1795年改为《法兰西学院科学院纪要》(Mémoires de l'Académie de Sciences de l'Institut de France);

以及《彼得堡科学院通讯》(1725)、《柏林科学院纪要》(1745)等,也刊登大量数学论文,但都不是专门的数学刊物.

因此热尔岗的《纯粹与应用数学年刊》是历史上第一个数学专门杂志.在法国的影响下,德国、英国也相继创办了数学杂志:1826年克雷尔(L. Crelle,1780—1855)的《纯粹与应用数学杂志》(Journal für die reine und angewandte Mathematik)在德国出版,这份杂志也被称为《克雷尔杂志》;1839年,《剑桥数学杂志》(Cambridge Mathematical Journal)在英国出版(一度改称《剑桥与都柏林数学杂志》,1855年后更名为《纯粹与应用数学季刊》).另外,1836年刘维尔又创办了一份与克雷尔杂志同名的法文期刊《纯粹与应用数学杂志》(Journal de Mathematiques Pure et Appliquées),通常也叫《刘维尔杂志》.克雷尔杂志、刘维尔杂志以刊登阿贝尔、伽罗瓦等默默无闻的青年作者的论文而著称,而这些后来被证明具有划时代意义的成果在以往的条件下难免遭到埋没.

数学专门期刊的创办,是数学社会化与职业化的重要表现.在19世纪后半叶,又涌现了一大批数学刊物,以下是1850—1899年间创办、至今仍在发行的主要数学期刊:

《纯粹与应用数学年报》(Annali di Mathematica pura ed Applicata,

1850,意大利);

《数学汇刊》(Матецатический Сборник,1865,俄);

《数学年刊》(Mathematische Annalen,1868,德);

《美国数学杂志》(American Journal of Mathematics,1878,美国);

《数学学报》(Acta Mathematica,1882,瑞典);

《数学年刊》(Annals of Mathematics,1884,美国);

《美国数学月刊》(The American Mathematical Monthly,1894,美国).

等. 1860 年代以后,各国相继成立的数学会也出有自己的数学会刊. 进入 20 世纪以后,数学刊物数量更是猛增,同时还出现了许多数学分支学科的专业性期刊. 为了对剧速膨胀的数学出版物进行检索、评论,国际上又出现了一些文摘性数学刊物,其中影响较大的有:

《数学评论》(Mathematical Review,1940,美国);

《数学及其边缘学科文摘》(Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiet,1931,德国)等,目前仅《数学评论》每年收录的论文就达 20 000 篇以上.

14.3.3　数学社团的成立

数学家专业团体的组织与建立,也是数学社会化与职业化的重要标志.

早在 17 世纪,一些科学家尤其是数学家群体的交流活动导致了一些国家科学院的建立. 第一个科学院是意大利的"林独(山猫)学院"(Academia de Lincei),1601 年由一群贵族青年学者成立于罗马. 学院持续了三十年,1611 年伽利略成为其成员. 更典型的例子是英国皇家学会和法国皇家科学院的建立. 1645 年,包括数学家沃利斯在内的一批英国学者开始在伦敦格雷萨姆学院集会,他们称这种集会为"无形学院". 无形学院后来得到皇室认可,1662 年国王查理二世下令特许成立"伦敦皇家自然知识促进学会"(Royal Society of London for the Promotion of Natural Knowledge),即今天的皇家学会. 学会强调数学、天文及其应用,第一任会长由数学家布龙克尔(W. Brouncker,

1620—1684) 担任. 法国科学院也是起源于科学家之间的非正式集会，并且是以数学家为主. 从 1630 年起，笛卡尔、德沙格、帕斯卡、费马等人经常在数学家梅森神父的僧舍聚会，这个科学团体便以"梅森学院"著称，其活动后来也得到了法皇的支持，1666 年，路易十四下令正式成立"皇家科学院"(Académie Royale des Sciences)，早期活动以数学与物理为主.

因此，所谓科学院当初都是以知识交流为目的的科学家特别是数学家的自发结社，后来则变成宫廷和政府支持的官办机构. 在 18、19 世纪，一些国家相继成立了科学院，如德国柏林科学院(1700)、俄国圣彼得堡科学院(1724)，即使在当时科学相对落后的美国，1863 年也成立了国家科学院. 这些科学院出版科学期刊，组织学术交流与评价，对数学发展起了积极的推动作用. 但是由于大多数国家的科学院越来越趋于荣誉性、权威性科学机构，那里的数学活动是在高层次上进行的. 19 世纪下半叶，随着数学教育与研究规模的空前扩大以及数学家人数的迅速增加，在比以往大得多的范围内开展数学交流的需要导致了新的真正的数学家民间团体的诞生，即各国数学会的建立，如：

莫斯科数学会(1864)
英国伦敦数学会(1865)
法国数学会(1872)
日本数学会(1877)
意大利巴勒摩数学会(1884)
美国数学会(1888)
德国数学会(1890)
印度数学会(1907)
中国数学会(1935)

等等. 这些数学会通过出版数学刊物、组织学术会议，颁发数学奖励、普及数学知识等活动，大大促进了数学的交流，有利于数学的发展.

各国和各地区数学团体的活动又进一步推动了国际性的数学交流与合作. 1893 年，F. 克莱因在芝加哥国际数学与天文学代表会议开幕词《数学的现状》中分析了法、德、美等国数学会的积极作用后呼吁：

“数学家们必须继续前进.他们必须建立国际联盟,而我相信当前芝加哥的这次国际会议将是在这一方向上迈出的第一步”,克莱因报告的最后一句话是:

“全世界数学家,联合起来!”

芝加哥会议特别是克莱因的报告产生了深远影响,其第一个直接的效果是国际数学家大会(International Congress of Mathematicians)的召开并形成传统.1897 年,来自 16 个国家的 208 名数学家在瑞士苏黎世举行了第一次国际数学家大会,并决定以后定期召开这样的大会.1900 年,第二次国际数学家大会在巴黎举行.从那以后,每隔四年举行一次,除两次世界大战期间外,未曾中断.现在国际数学家大会已经成为规模最大、水平最高的全球性数学科学学术会议,平均与会人数达 3000 人左右,会议邀请的报告,一般被认为反映了近期数学科学中重要的成果与进展而受到高度重视,另外每次大会开幕式上同时举行有“数学诺贝尔奖”之誉的菲尔兹数学奖(见 14.3.4)当届颁奖仪式,更使历届国际数学家大会成为舆论界瞩目的事件并给数学带来社会声誉.以下是各届国际数学家大会简况:

1897	瑞士苏黎世	1958	英国爱丁堡
1900	法国巴黎	1962	瑞典斯德哥尔摩
1904	德国海德堡	1966	苏联莫斯科
1908	意大利罗马	1970	法国尼斯
1912	英国剑桥	1974	加拿大温哥华
1920	法国斯特拉斯堡	1978	芬兰赫尔辛基
1924	加拿大多伦多	1983	波兰华沙
1928	意大利波伦亚	1986	美国伯克利
1932	瑞士苏黎世	1990	日本京都
1936	挪威奥斯陆	1994	瑞士苏黎世
1950	美国坎布里奇	1998	德国柏林
1954	荷兰阿姆斯特丹		

克莱因倡议的国际数学联盟,建立过程则比较曲折.1920 年,在法国斯特拉斯堡举行的第六次国际数学家大会上;法、英等 11 个国家的

代表发起成立了最早的国际数学联盟(法文名 Union Mathématique Internationale),并推举比利时数学家瓦莱·普桑(C.-J.-G.N.de la Vallée Poussin,1866—1962)为主席.但由于第一次世界大战后政治气氛的不利影响,这个联盟的工作进展并不顺利,1932 年便停止了活动.一直到第二次世界大战结束以后,1950 年在美国纽约举行的一次特别会议上,22 个国家的数学团体重新发起成立国际数学联盟,1952 年在意大利罗马正式举行了成立大会.新成立的国际数学联盟(International Mathematical Union,简称 IMU)支持有助于数学科学发展的国际数学研究与数学教育活动,1962 年以后还负责国际数学家大会的主办以及菲尔兹奖的评选等.今天,国际数学联盟在促进国际数学交流与合作方面发挥着核心作用.到 1995 年,已有 59 个国家和地区成为该联盟的成员.中国数学会于 1996 年加入了国际数学联盟.

14.3.4　数学奖励

数学奖励是对数学发展的激励机制,是数学社会化的必要因素之一.在 20 世纪以前,各国科学院设有许多科学奖,但专门的数学奖则很少.1905 年匈牙利科学院设立的波约奖(纪念非欧几何发明人之一 F.波约),是较早的有份量的国际数学大奖,其一、二、三届获奖人分别是庞加莱、希尔伯特和爱因斯坦.以后各国设立的数学奖项逐渐增多,同时出现了一些重要的国际性奖.这里我们仅介绍两项影响最大的国际数学奖励——菲尔兹奖和沃尔夫奖,由于诺贝尔奖中没有数学奖,这两项奖就成为目前数学家能获得的最高国际奖赏.

(一) 菲尔兹奖

菲尔兹数学奖是根据加拿大数学家菲尔兹(J.C.Fields,1863—1932)的倡议而设.菲尔兹是多伦多大学教授、1924 年多伦多国际数学家大会主席.他卓越的组织工作使多伦多国际数学家大会获得很大成功,会后他建议利用这次会议的经费余款设立一项国际性数学奖.菲尔兹的建议在 1932 年苏黎世国际数学家大会上被通过,但菲尔兹本人在数月前已不幸病故,临终立下遗言,加上了他个人的捐款,并

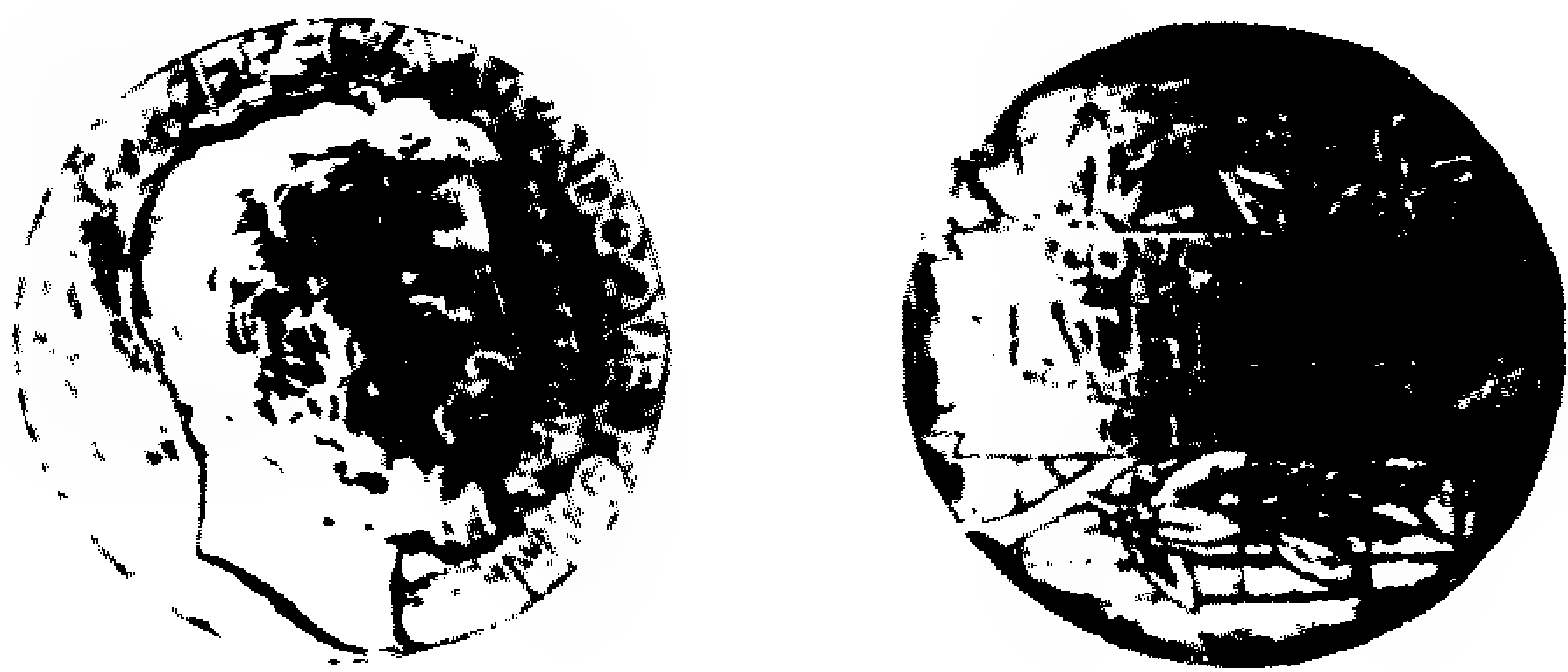


图 14.2 菲尔兹奖章

再次强调了奖金的国际性.

首届菲尔兹奖在 1936 年奥斯陆国际数学家大会上颁发,此后由于第二次世界大战爆发而中断,1950 年又恢复颁奖.

菲尔兹奖主要奖励年轻数学家的工作,1974 年温哥华国际数学家大会上更明确规定该奖只授予 40 岁以下的数学家.由于历届获奖成果的重要性,菲尔兹奖享有很高的声誉.以下是历届菲尔兹奖获得者及其研究领域简况:

1936	阿尔福斯(L. V. Ahlfors,芬兰 — 美国),	复分析
	道格拉斯(J. Douglas,美国),	极小曲面
1950	施瓦茨(L. Schwartz,法国),	分布理论,泛函分析,概率论
	赛尔伯格(A. Selberg,挪威 — 美国),	解析数论,抽象调和分析
1954	小平邦彦(Kodaira Kunihiko,日本),	代数几何
	塞尔(J.-P. Serre,法国),	代数拓扑,代数几何
1958	托姆(R. Thom,法国),	代数拓扑,微分拓扑
	罗斯(K. F. Roth,英国 — 德国),	解析数论
1962	米尔诺(J. W. Milnor,美国),	微分拓扑,代数拓扑
	赫尔曼德(L. Hörmander,瑞典),	偏微分方程
1966	阿蒂亚(M. F. Atiyah,英国),	代数几何,代数拓扑
	柯恩(P. J. Cohen,美国),	连续统假设,抽象调和分析
	格罗申迪克(A. Grothendieck,法国),	代数几何,泛函分析,同调代数
	斯梅尔(S. Smale,美国),	微分拓扑,微分动力系统

1970	贝克(A. Baker,英国),	超越数论,代数数论
	广中平祐(Hironaka Heisuke,日本),	代数几何,奇点理论
	诺维可夫(S. P. Novikov,前苏联),	微分拓扑,代数拓扑,孤立子理论
	汤普逊(J. G. Thompson,美国),	有限群论
1974	邦别里(E. Bombieri,意大利),	解析数论,极小曲面,有限群论
	曼福德(D. B. Mumford,美国),	代数几何
1978	德里涅(P. Deligne,比利时),	代数几何,调和分析,多复变函数
	费弗曼(C. Fefferman,美国),	调和分析,多复变函数
	马尔古利斯(G. A. Margulis,前苏联),	李群的离散子群
	奎伦(D. Quillen,美国),	代数 K 理论,
1983	孔涅(A. Connes,法国),	算子代数
	瑟斯顿(W. P. Thurston,美国),	低维拓扑,叶状结构
	丘成桐(Yau Shing-Tung,中国),	微分几何,偏微分方程,相对论
1986	唐纳尔逊(S. Donaldson,英国),	微分拓扑
	弗里德曼(M. Freedman,美国),	四维庞加莱猜想
	法尔廷斯(G. Faltings,德国),	莫代尔猜想
1990	德里菲尔德(V. Drinfeld,前苏联),	量子群
	琼斯(V. F. R. Jones,新西兰 — 美国),	纽结理论
	森重文(Mori Shigefumi,日本),	代数几何
	威顿(E. Witten,美国),	超弦理论
1994	布尔金(J. Bourgain,比利时),	偏微分方程
	里昂斯(P.-L. Lions,法国),	非线性偏微分方程
	约柯兹(J.-C. Yoccoz,法国),	复动力系统
	契尔马诺夫(E. Zelmanov,俄国),	有限群
1998	博彻兹(R. E. Borcherds,英国),	李代数,自守形式
	高尔(W. T. Gowers,英国),	巴拿赫空间理论,组合学
	康特谢维奇(M. Kontsevich,俄国),	数学物理,代数几何,拓扑学
	麦克马伦(C. T. McMullen,美国),	复动力系统,双曲几何

(二)沃尔夫奖

沃尔夫奖是由沃尔夫基金会资助的奖项. 沃尔夫(R. Wolf, 1887—1981)是富有的犹太工业家,曾任古巴驻以色列大使,后移居以色列. 1976 年以其家族名义捐巨款成立沃尔夫基金会,同时设物理、化

学、医学、农业、数学五种奖(1981 年增设艺术奖),1978 年开始颁奖,每年一次(可空缺),评奖委员会由世界著名科学家组成. 沃尔夫数学奖的选定是根据对候选人数学成就的综合评价,获奖人获奖时多已蜚声数坛,迄今获奖者年龄平均在 60 岁以上,最低获奖年龄为 43 岁(1996 年度沃尔夫奖得主、证明费马大定理的英国数学家 A. 维尔斯),因此可以说与菲尔兹奖互为补充,交相辉映. 以下是历届沃尔夫奖获得者及其研究领域:

1978	盖尔范德(I. M. Gelfand,前苏联),	泛函分析,群表示论
	西格尔(C. L. Siegel,德国),	数论,多复变函数,天体力学
1979	勒雷(J. Leray,法国),	偏微分方程拓扑方法
	韦依(A. Weil,法国),	数论,代数几何
1980	嘉当(H. Cartan,法国),	代数拓扑,复变函数,同调代数
	科尔莫戈罗夫(A. N. Kolmogorov,前苏联),	概率论,调和分析,动力系统
1981	阿尔福斯(L. Ahlfors,芬兰 — 美国),	复变函数论
	扎里斯基(O. Zariski,俄国 — 美国),	代数几何
1982	惠特尼(H. Whitney,美国),	代数拓扑
	克列因(M. G. Krein,前苏联),	泛函分析及其应用
1984	陈省身(Chern Shiing-Shen,中国 — 美国),	整体微分几何
	埃尔特希(P. Erdös,匈牙利),	数论,组合论,概率论
1985	小平邦彦(Kodaira Kunihiko,日本),	代数几何
	勒威(H. Lewy,波兰 — 美国),	偏微分方程
1986	艾伦伯格(S. Eilemberg,波兰 — 美国),	代数拓扑,同调代数
	赛尔伯格(A. Selberg,挪威 — 美国),	数论,调和分析,离散群
1987	拉克斯(P. D. Lax,美国),	偏微分方程及应用
	伊藤清(Itô Kiyosi,日本),	概率论,随机分析
1988	赫尔曼德(L. Hörmander,瑞典),	偏微分方程
	希策布鲁克(F. Hirzebruch,德国),	拓扑学,代数几何
1989	坎尔德隆(A. P. Caldron,阿根廷 — 美国),	调和分析,偏微分方程
	米尔诺(J. Milnor,美国),	微分拓扑
1990	德乔吉(E. de Giorgi,意大利),	偏微分方程,变分法
	皮亚捷茨基 - 夏皮罗 (I. Piatetski-Shapiro,前苏联 — 以色列),	自守函数论,群表示论

1992	卡尔松(L. Carleson,瑞典),	函数论
	汤普逊(J. G. Thompson,美国),	有限群论
1993	格罗莫夫(M. Gromov,俄国 — 法国),	大范围微分几何及辛几何
	蒂茨(J. Tits,比利时 — 法国),	代数群及其他类群的结构理论
1995	莫泽(J. K. Moser,德国),	哈密顿系统,非线性微分方程
1996	朗兰(R. Langlands,美国),	调和分析,自守形式,数论
	维尔斯(A. Wiles,英国),	费马大定理证明
1997	克勒(J. Keller,美国),	波动理论
	西奈(Y. G. Sinai,俄国),	遍历理论
1999	洛瓦茨(L. Lovász,匈牙利),	离散数学,计算机科学
	斯坦(E. M. Stein,美国),	调和分析
2000	波特(R. Bott,美国).	拓朴学,微分几何
	塞尔(J.-P. Serre,法国),	代数拓朴,代数几何
2001	阿诺(V. I. Arnold,俄国),	动力系统,微分方程,奇点理论
	瑟拉(S. Shelah,以色列),	数理逻辑

中国现代数学的开拓 15

中国古代数学有着光辉的传统(参见第3章),但从明代以后落后于西方.20世纪初,在科学与民主的高涨声中,中国数学家们踏上了学习并赶超西方先进数学的光荣而艰难的历程.本章主要叙述20世纪上半叶(1900—1950)中国现代数学教育与数学研究的开拓过程,以发扬老一辈数学家的创业精神,为振兴中国现代数学而奋斗.

15.1 西方数学在中国的早期传播

从17世纪初到19世纪末大约三百年时间,是中国传统数学滞缓发展和西方数学逐渐传入的过渡时期,这期间出现了两次西方数学传播的高潮.

第一次是从17世纪初到18世纪初,标志性事件是欧几里得《原本》的首次翻译.1606年,中国学者徐光启(1562—1633)与意大利传教士利玛窦(Matteo Ricci)合作完成了欧几里得《原本》前6卷的中文翻译,并于翌年(1607)正式刊刻出版,定名《几何原本》,中文数学名词"几何"由此而来.17世纪中叶以后,文艺复兴时代以来发展起来的西方初等数学知识如三角学、透视学、代数学等也部分传入中国,特别是1650年代,波兰传教士穆尼阁(J.Nicolas Smogolenski)来华时传入了发明不久的对数,1664年薛凤祚汇编《天文会通》,其中有"比例对数表"一卷(1653),首次系统介绍对数并使用了"对数"这一名词.

西方数学在中国早期传播的第二次高潮是从 19 世纪中叶开始. 除了初等数学,这一时期传入的数学知识还包括了解析几何、微积分、无穷级数论、概率论等近代数学. 1859 年, 清代数学家李善兰(1811—1882) 与英国传教士伟烈亚历(A. Wylie) 合作出版了《代微积拾级》,这是在中国翻译出版的第一部微积分著作[原著为美国数学家罗密士(E. Loomis) 所著 Elements of Analytical Geometry and of Differential and Integral Calculus, 1851]. 李善兰在翻译过程中创造了大量中文数学名词,其中有许多(如函数、微分、积分、级数、切线、法线、渐近线、抛物线、双曲线、指数、多项式、代数等等) 被普遍接受并沿用至今.

李善兰还与他人合作翻译了德摩根《代数学》等其他许多西方著作. 比李善兰稍晚的另一位数学家华蘅芳(1833—1902) 也翻译出版了《微积溯源》(1874)、《决疑数学》(1880) 等多种数学著作,其中《决疑数学》是在中国流传的第一部概率论著作.

李善兰是受清中叶以戴震、焦循、汪莱、李锐等为代表的乾嘉学派影响钻研中国古典数学并卓有成果的数学家中的突出代表. 他运用中国传统数学方法创造的"尖锥术",相当于卡瓦列里的早期积分学;他研究传统的"垛积术" 而得到一系列组合恒等式,其中包括著名的"李善兰恒等式":

$$\sum_{i=0}^{p}(C_p^i)^2 C_{r+2p-i}^{2p} = (C_{r+p}^p)^2.$$

这些工作成为他后来接受并翻译西方近代数学的学术基础. 李善兰后来在北京同文馆天算馆(1867 年开设) 任算学教习. 同文馆是清政府的官办学校,1898 年并入京师大学堂.

西方数学在中国的早期传播对中国现代数学的形成起了一定的作用,但由于当时整个社会环境与科学基础的限制,总的来说其功效并不显著. 清末数学教育的改革仍以初等数学为主,即使在所谓"大学堂"中,数学教学的内容也没有超出初等微积分的范围,并且多半被转化为传统的语言来讲授. 中国现代数学的真正开拓,是在辛亥革命以后,兴办高等数学教育是重要标志.

15.2 高等数学教育的兴办

自鸦片战争以后,西方列强的军舰与大炮使中国朝野看到了科学与教育的重要,部分有识之士还逐步认识到数学对于富国强兵的意义,从而竭力主张改革国内数学教育,同时派遣留学生出国学习西方数学.辛亥革命以后,这两条途径得到了较好的结合,有力地推动了中国现代高等数学教育的建制.

1912 年,中国第一个大学数学系 —— 北京大学数学系成立(当时叫“数学门”,1918 年改“门” 称“系”),这是中国现代高等数学教育的开端.当时主持数学系的冯祖荀(1880—1940),是 1904 年京师大学堂派赴日本的 31 名留学生之一,就读于京都帝国大学.冯祖荀是迄今所知出国专习数学最早的中国留学生之一. 比他稍晚的郑之蕃(1887—1963),1907 年赴美国康奈尔大学学数学,1911 年回国.郑之蕃在 1920 年代成为清华大学算学系的创建人之一.

辛亥革命前后,更多的热血青年怀着科学救国、教育救国的思想走出国门到欧、美、日各国学习现代数学.1912 年,吴玉章等发起组织“留法俭学会”,以“输世界文明于国内” 为宗旨.在首批赴法勤工俭学的学生中,已知有何鲁等三位赴法后攻读数学.何鲁(1894—1973) 在里昂大学获得科学硕士学位后回国(1919),长期奔波于东南大学(南京)、中央大学(南京)、大同大学(上海)、重庆大学、安徽大学、云南大学等之间,为发展中国现代高等数学教育立下了汗马功劳.

1917 年,胡明复(1891—1927) 以论文《具边界条件的线性积 - 微分方程论》获美国哈佛大学博士学位,成为第一位获得博士学位的中国数学家.胡明复在美期间与其他志同道合的中国留学生共同创建了“中国科学社” 和《科学》杂志,并亲自撰写了大量介绍现代数学的文章,在当时有很大影响.他回国后与其兄胡敦复等合办上海大同大学,并任数学教授.1927 年不幸溺水早逝.

1920 年,姜立夫(1890—1978) 在天津创办了南开大学数学系.姜立夫也是哈佛大学博士学位获得者(1919),他主持的南开数学系培养

了不少优秀人才. 1940 年代, 姜立夫又主持筹建了中国第一个数学研究所 —— 中央研究院数学研究所.

经过积极筹备, 清华学校大学部算学系于 1927 年正式成立, 郑之蕃任第一任主任. 1928 年, 清华学校改称清华大学, 郑之蕃举荐早年留学法国的熊庆来(1893—1969) 出任算学系主任. 不久, 在美国芝加哥大学获博士学位的杨武之(1898—1975) 回国加入清华(杨武之在抗日战争期间长期主持了西南联合大学数学系). 1930 年, 中国大学的第一个研究生院在清华诞生, 并于 1931 年开始招收第一批数学研究生.

1929 年和 1931 年, 留学日本的陈建功(1893—1971) 和苏步青(1902—) 先后回国, 均受聘于浙江大学. 二人都是日本东北帝国大学理学博士. 陈建功 1929 年回国后出任浙江大学数学系首任主任, 1933 年他举荐苏步青接任. 陈、苏通力合作, 于 1931 年在浙江大学创办了中国第一个数学讨论班.

1920 年代, 是中国现代数学发展道路上的关键时期. 在这一时期, 全国各地大学纷纷创办数学系, 数学人才培养开始着眼于国内. 除了已经提到的北京大学、清华大学、南开大学、浙江大学, 在这一时期成立数学系的还有: 东南大学(1921, 后曾改称中央大学、南京大学); 北京师范大学(1922); 武汉大学(1922, 当时称"武昌高等师范学校"); 厦门大学(1923); 四川大学(1924, 当时称"成都高等师范学校"); 中山大学(1924); 东北大学(1925); 交通大学(1928); 安徽大学(1930); 山东大学(1930); 河南大学(1930) 等. 这是一个艰苦的创业过程. 许多人放弃了国外的优裕环境, 为发展中华故土的数学教育贡献了毕生精力. 与此同时, 一批在国内成长的数学家, 也作出了无私的奉献, 其中如傅种孙(1898—1962), 北京高等师范学校(即北京师范大学) 毕业生, 长期扎根国内, 成为著名的数学教育家; 吴在渊(1884—1935), 靠自学成为国内数学知名教授, 与留美归国的胡敦复等团结合作, 惨淡经营大同大学数学系 20 余年, 在月薪仅能勉强维生的情况下, "日则教书, 夜则译著", 并喊出了"中华学术, 要求自立" 的强音. 由于长期积劳成疾, 以 52 岁英年咯血而终. 中国现代数学事业的开拓, 充满了开路先锋们包括许多无名英雄可歌可泣的事迹!

从1920年代起，中国大学开始邀请外国数学家来华讲学. 根据现有记录，最早来华访问讲学的外国数学家是德国的克诺普(K. Knopp)，1920—1927年长期任青岛大学教授. 1920年6月至9月，当时任法国总理的著名数学家班勒维(P. Painlevé) 访华，在北京大学和上海中国科学社作过报告，并呼吁在中国建立数学家团体. 随行的还有数学家博雷尔. 1921年，英国数学家罗素访华，在北京大学作数学基础的演讲. 外国著名数学家来华访问讲学在1930年代达到高潮，先后有：柏拉须开(W. Blaschke，德，1932)；斯披纳尔(E. Sperner，德，1932—1934)；伯克霍夫(美，1934)；奥斯古德(W. Osgood，美，1932—1934)；维纳(美，1935—1936) 和阿达马(法，1936) 等. 其中奥斯古德在北京大学开设了复变函数论、实变函数论、理论力学等多门系统课程；维纳在清华大学开设了傅里叶分析的系统课程；阿达马作了偏微分方程理论的系列讲演等等，对国内青年学生与学者的学术成长很有帮助.

15.3 现代数学研究的兴起

伴随着中国现代数学教育的形成，现代数学研究也在中国悄然兴起. 中国现代数学的开拓者们，在发展现代数学教育的同时，努力拼搏，追赶世界数学前沿，至1920年代末和1930年代，已开始出现一批符合国际水平的研究工作.

1928年，陈建功在日本《帝国科学院院报》上发表论文《关于具有绝对收敛 Fourier 级数的函数类》，中心结果是证明了一条关于三角级数在区间上绝对收敛的充要条件(即为 Young 连续函数的傅里叶级数). 几乎同时，G. 哈代和J. 李特尔伍德在德文杂志“数学时报”上也发表了同样的结果，因而西方文献中常称此结果为“哈代 - 李特尔伍德定理”，实际应称“陈 - 哈代 - 李特尔伍德定理”，这标志中国数学家已能生产国际一流水平的研究成果. 陈建功后来在这一领域又做了大量工作，1930年在日本岩波书店出版了专著《三角级数论》，这是现代中国学者在国外出版的第一部数学专著.

差不多同时，苏步青、江泽涵、熊庆来、曾炯之等也在各自领域里作



图 15.1　前排左起:郑之蕃、杨武之、阿达马、维纳、熊庆来,等

出令国际同行瞩目的成果.1928—1930 年间,苏步青在当时处于国际热门的仿射微分几何方面引进并决定了仿射铸曲面和旋转曲面,他在此领域的另一个美妙发现后被命名为“苏锥面”.苏步青后来在射影曲线、曲面论、高维空间共轭网理论及 K 展空间和一般度量空间几何等方面取得一系列成就.江泽涵(1902—1994)是将拓扑学引进中国的第一人,他本人在拓扑学领域中最有影响的工作是关于不动点理论的研究,这在他 1930 年代的研究中已有端倪.江泽涵从 1934 年起出任北京大学数学系主任.熊庆来“大器晚成”,1931 年,已经身居清华大学算学系主任的熊庆来,再度赴法国庞加莱研究所,两年后取得法国国家博士学位,年已四十.其博士论文《关于无穷级整函数与亚纯函数》,引进后以他的名字命名的“熊氏无穷级”等,将博雷尔有穷级整函数论推广为无穷级情形;曾炯之(1898—1940)1933 年在诺特指导下完成博士论文,他在哥廷根积极参与了诺特领导的抽象代数学派的活动(参见图 11.4).曾炯之 1933 年在哥廷根发表的论文《函数域上的可除代数》,包含了现代代数文献中常引用的“曾定理”.1934 年曾炯之放弃国

外提供的资助回国，在浙江大学等教书. 1936 年又发表一篇论文，其中建立了西方文献中称为“曾层次”的 c_i 域概念及其理论. 抗日战争爆发后，曾炯之辗转来到西康技艺专科学校，1940 年因胃穿孔病逝西昌.

从 20 世纪初第一批学习现代数学的中国留学生跨出国门，到 1930 年代中叶中国数学家的名字在现代数学一些热门领域的前沿屡屡出现，前后不过 30 余年，这反映了中国现代数学的先驱者们高度的民族自强精神和卓越的科学创造能力. 这一点，在 1930 年代中至 1940 年代中的时期里有更强烈的体现. 这一时期的大部分时间，中国是处在抗日战争的烽火之中，时局动荡，生活艰苦. 当时一些主要的大学都迁移到了敌后内地，如清华、北大和南开三所大学迁到云南昆明，成立了“西南联合大学”；浙江大学也迁至贵州湄潭，等等. 在极端动荡、艰苦的战时环境下，师生们却表现出抵御外侮、发展民族科学的高昂热情. 他们在空袭炸弹的威胁下，照常上课，并举行各种讨论班，同时坚持深入的科学研究，可以说创造了中国现代数学发展历程中的奇迹. 这一时期产生了一系列先进的数学成果，其中最有代表性的是华罗庚、陈省身、许宝騄的工作.

华罗庚(1910—1985)，江苏金坛人，初中毕业后，他父亲送他到上海中华职业学校学习，未读完即被召回. 1930 年，他在家乡写成的一篇论文《苏家驹之代数的五次方程式解法不可能成立之理由》在《科学》杂志发表，引起了千里之外的清华大学算学系主任熊庆来的注意，1931 年被调到清华大学任助理员. 在清华当时特有的学术环境下，华罗庚在熊庆来和杨武之等教授的扶植下，通过刻苦学习，很快掌握了高等数学. 1936 年，经访问清华的维纳推荐到当时解析数论研究的世界中心剑桥大学作访问学者，在哈代名下从事数论研究，两年内发表论文十余篇，在华林问题、塔利问题、完整三角和等方面取得重要结果，引起国际同行重视. 1938 年回国后到西南联大，被破格提拔为教



图 15.2　华罗庚

授.正是在昆明联大期间,华罗庚撰写了专著《堆垒素数论》,该书经И.М.维诺格拉多夫介绍在苏联科学院用俄文出版(1946),给华罗庚带来了世界声誉.除了解析数论,华罗庚后又在代数学、多复变函数论、数值分析等领域作出一系列重大贡献,今日这些领域里都有以他的名字命名的定理与方法,如嘉当-布饶尔-华氏定理、华氏算子、华-王方法等等.华罗庚1946年应邀赴美国普林斯顿高等研究院工作.1950年毅然放弃伊利诺大学数学终身教授职位回到中国.华罗庚回国后,即参与了中国科学院数学研究所的筹建,1952年正式出任所长.华罗庚是依靠自学成才的数学家,他以初中学历而成为世界级的数学家和美、德等多国科学院的院士,他的名言是:"聪明在于学习,天才在于积累".

陈省身(1911—),浙江嘉兴人,1926年入南开大学,1930年到清华攻读研究生,指导教师孙光远,1934年获清华硕士学位,是中国自己培养的第一名数学研究生.1934年赴德国汉堡大学,师从著名微分几何学家柏拉须开,不到二年就获得了博士学位,经柏拉须开推荐到巴黎在E.嘉当名下访问研究,1937年回国后任教于西南联大.1943年应美国O.韦布伦、H.外尔之邀赴普林斯顿高等研究院工作两年,正是在此期间,他完成了将高斯-博内公式推广到高维曲面和紧致黎曼流形上的经典性工作,引起了国际微分几何学界的震惊.之后他又回到中国,中央研究院数学研究所的筹办工作实际由他负责.1949年再度赴美,先后在芝加哥大学和柏克莱加州大学任终身教授,1981年创办柏克莱数学科学研究所.陈省身是现代微分几何的奠基人,由于他的特殊贡献,1984年他荣获了沃尔夫奖,是迄今获此殊荣的唯一华人.1985年,陈省身在他的母校天津南开大学创建了南开数学研究所.



图15.3　陈省身

许宝騄(1910—1970),北京人.1929年由燕京大学化学系转到清华大学算学系,1936年赴英国伦敦大学学院高尔顿实验室和统计系学

习数理统计,1938 年获博士学位.许宝騄身处由费希尔领导的英国统计学派的中心,受到很大影响.他 1938 年发表的重要论文《最优无偏二次方差估计》,是国际上关于方差分量和方差数值二次估计的大量文献的起点;许宝騄是多元统计分析的奠基人之一,对极限分布、试验设计等也有重要贡献.一些外国学者称赞许宝騄是“20 世纪最深刻、最富有创造性的统计学家之一”.

我们已经看到,到 20 世纪 30 年代,中国现代数学教育与数学研究均已初步确立.在这样的形势下,数学家们开始相互联络,酝酿成立数学家团体.

在中国,中小型数学学术团体在辛亥革命前后已有出现,值得一提的如:1900 年周达(1879—1949)在扬州成立的“知新算社”,宗旨是“研究学理,联络声气,切磋讨论,以辅斯学之进化”;1911 年,胡敦复等在北京成立的“立达学社”(后南迁上海);1912 年南通孙敬民、崔朝庆成立“数学杂志社”以出版《数学杂志》为宗旨;以及 1929 年北京地区各学校联合建立的“中国数理学会”.这些团体多为地区性的,规模不大,存在时间短.从 1934 年开始,各地数学会、社的负责人经过联系、商讨,认为成立全国性数学会的条件已经成熟,便着手进行具体筹备工作,发起或参与筹备的数学家主要有何鲁、熊庆来、胡敦复、顾澄、范会国、陈建功、苏步青、朱公谨等.1935 年 7 月 25 日,一个崭新的全国性学术团体——中国数学会宣告成立,成立大会在上海交通大学图书馆举行,与会的数学家共 33 人.会上交流了学术论文,通过了中国数学会章程,并选举了第一届董事会、理事会和评议会.特别重要的是,会议决定出版中国自己的全国性数学刊物.1936 年,《中国数学会学报》即后来的《数学学报》正式出版,同时出版的还有普及性数学刊物《数学杂志》即后来的《数学通报》.

中国数学会第一次会议上还组成了数学名词审查委员会,对当时翻译和使用的数学名词进行统一核定.审查结果,确定数学名词 3426 条,由当时的教育部以部令公布.“数学”这一学科名称本身也是在这一时期最终确定的,而在此之前,中国国内“数学”与“算学”两词长期并用.

到 1940 年代后期，又有一批优秀的青年数学家成长起来，走向国际数学的前沿并作出先进的成果，其中最有代表性的是吴文俊的工作．吴文俊(1919—)，上海人，1940 年毕业于上海交通大学，1947 年赴法国留学．当时正是法国布尔巴基学派的鼎盛时期，吴文俊在这样的环境下钻研代数拓扑学，在留学期间就提出了后来以他的名字命名的“吴示性类”和“吴公式”，有力地推动了示性类理论与代数拓扑学的发展．吴文俊 1951 年谢绝了法国师友的挽留回国，不久又在示嵌类理论方面作出重要贡献，他发展的一套示嵌类理论，包溶了 20 世纪 30 年代以来国外诸家的理论．吴文俊后来的重要贡献还涉及代数几何、博奕论及数学机械化等许多领域．

总之，经过老一辈数学家们披荆斩棘的努力，中国现代数学从无到有地发展起来，从 1930 年代开始，不仅有了达到一定水平的队伍，而且有了全国性的学术性组织和发表成果的杂志，现代数学研究可以说初具规模，并呈现上升之势，这种势头一直保持到 20 世纪 40 年代，即使在抗日战争的艰难条件下也仍然坚持下来并得以发展．

1949 年中华人民共和国成立之后，中国现代数学的发展进入了一个新的阶段．新中国的数学事业经历了曲折的道路而获得了巨大的进步，这种进步主要表现在：建立并完善了独立自主的现代数学科研与教育体制；形成了一支研究门类齐全、并拥有一批学术带头人的实力雄厚的数学研究队伍；取得了丰富的和先进的学术成果，其中达到国际先进水平的成果比例不断提高．改革开放以来，中国数学更是进入了前所未有的良好的发展时期，特别是涌现了一批优秀的、活跃于国际数学前沿的青年数学家．通过对中国现代数学早期创业史的简短回顾，我们已经看到，中国数学的今天，是整整一个世纪几代数学家共同拼搏奋斗的结果．1986 年，中国数学会已成为国际数学联盟的成员；1998 年，中国北京经国际数学联盟成员国代表大会无记名投票被选定为 2002 年国际数学家大会的举办城市．这一切标志着中国数学发展水平与国际地位的提高，同时也吹响了新世纪中国数学赶超世界先进水平的进军号角！

参考文献

1 N. Bourbaki. Elements of the History of Mathematics: English Version. Springer-Verlag, 1994

2 C. Boyer. A History of Mathematics. John Wiley & Sons, Inc. 1968

3 R. Carlinger(ed.). Classics of Mathematics. Moore Publishing Company Inc. 1982

4 R. Cooke. The History of Mathematics-A Brief Course, John Wiley & Sons, Inc. 1997

5 H. Eves. Great Moments in Mathematics, The Mathematical Associa - tion of America, 1983(中译本:数学史上的里程碑,欧阳绛等译. 北京:科学技术出版社,1990)

6 T. Heath. A History of Greek Mathematics I. II. Dover Publications, Inc. 1981

7 M. Kline. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York: Oxford University Press, 1972. (中译本:古今数学思想[一、二、三、四]. 上海:上海科学技术出版社,1979—1981)

8 J.-P. Pier(ed.). Development of Mathematics 1900—1950. Birkhäuser, 1994

9 D. Struik. A Concise History of Mathematics. 4th Revised Edition. Dover Publications, Inc. 1987

10 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇:数学卷. 郑州:河南教育出版社,1993

11 李迪. 中国数学通史:宋元卷. 南京:江苏教育出版社,1999

12 李文林主编. 数学珍宝. 北京:科学出版社,1998

13 梁宗巨. 世界数学通史:上册. 沈阳:辽宁教育出版社,1996

14 钱宝琮主编. 中国数学史. 北京:科学出版社,1964

人名索引

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

术语索引

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

[General Information]
书名=数学史概论 第2版
作者=李文林
页数=426
SS号=11113520
出版日期=2002年
出版社=高等教育出版社